

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Monique GUILLARD

**1^{re} THÈSE — « Considérations sur l'observation des
franges d'interférences en microscopie. »**

2^e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 mai 1962 devant la Commission d'examen.

MM. ARNULF *Président.*

FRANÇON }
CHABBAL } *Examineurs.*

Extrait de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1964



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554028_0021

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : GUILLARD

Prénom : Monique

Date de la soutenance : 24 mai 1962

Numéro d'ordre : N° 748

1

GUILLARD (Monique). — Considérations sur l'observation des franges d'interférences en microscopie. — *Paris*, Extrait de la Revue d'Optique, 1964.

Th. Sc. Phys. Paris, 1962, N° 748

2

GUILLARD (Monique). — Considérations sur l'observation des franges d'interférences en microscopie. — *Paris*, Extrait de la Revue d'Optique, 1964.

Th. Sc. Phys. Paris, 1962, N° 748

3

GUILLARD (Monique). — Considérations sur l'observation des franges d'interférences en microscopie. — *Paris*, Extrait de la Revue d'Optique, 1964.

Th. Sc. Phys. Paris, 1962, N° 748

4

GUILLARD (Monique). — Considérations sur l'observation des franges d'interférences en microscopie. — *Paris*, Extrait de la Revue d'Optique, 1964.

Th. Sc. Phys. Paris, 1962, N° 748

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

Monique GUILLARD

**1^{re} THÈSE — « Considérations sur l'observation des
franges d'interférences en microscopie. »**

2^e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 mai 1962 devant la Commission d'examen.

MM. ARNULF *Président.*
FRANÇON }
CHABBAL } *Examineurs.*

Extrait de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15^e)

1964



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	DESTOUCHES	T	Théories Physiques.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	AMIEL	T	Chimie générale.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres orga- nisés.	HOCART	T	Minéralogie et Cristallogr.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	J. P. MATHIEU	T	Physique (Optique).
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	COUTEAUX	T	Biol. animale (P. C. B.).
WYART	T	Minéralogie et Cristallogr.	MAY	T	Zoologie (Orsay).
TEISSIER	T	Zoologie.	CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay).	FELDMANN	T	Biologie Végétale marine.
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	GUINIER	T	Physique des Solides (Or- say).
MONNIER	T	Physiologie Générale.	JOST	T	Physiologie comparée.
PIVETEAU	T	Paléontologie.	FORTET	T	Calcul des Probabilités et Phys. mathématique.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).	SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral.
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).	CHOUARD	T	Physiologie Végétale.
LAPFITTE	T	Chimie générale.	MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéro- naut.).
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	BRELOT	T	Calcul diff. et Intégral.
COULOMB	T	Physique du Globe.	NORMANT	T	Synthèse organique géné- rale.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie Animale (S.P. C.N.).	BÉNARD	T	Chimie Minérale.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	BUVAT	T	Botanique (E. N. S.).
DRACH	T	Zoologie.	DUGUÉ	T	Statistiques Mathématis- ques.
KASTLER	T	Physique (E. N. S.).	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
EPHRUSSI	T	Génétique.	ULRICH	T	Physiologie Végétale.
RIVIÈRE	T	Géologie (S. P. C. N.) et sédim.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (P. C. B.).	KIRRMANN	T	Théories Chimiques.
LUCAS R.	T	Recherches Physiques.	CHADEFAUD	T	Botanique.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiologie de la nutrit.
ARNULF	T	Optique appliquée.	SALEM	T	Mathématiques générales.
MORAND	T	Physique Enseignement.	LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
SOLEILLET	T	Physique (P. C. B.).	DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées.
FORTIER	T	Mécanique exp. des Fluides.	EHRESMANN	T	Topologie Algébrique.
DANJON	T	Astronomie.	FRANÇON	T	Physique (S. P. C. N.).
PETIT	T	Biologie maritime.	GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
QUENEY	T	Météorologie et dynami- que atmosphérique.	GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
GALLIEN	T	Embryologie.	PISOT	T	Tech. Mathém. de la Phys.
EICHHORN	T	Botanique.	ROCH	T	Géologie.
DE CUGNAC	T	Biologie Végétale (S. P. C. N.).	SCHATZMAN	T	Astrophysique.
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie Physique.	TERMIER	T	Paléontologie stratigra- phique.
THELLIER	T	Physique du Globe.	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
L'HÉRITIER	T	Biologie Générale (Orsay).	LENNUIER	T	Physique (M. G. P.).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).	RIZET	T	Génétique (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique Générale.	ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
DUBREIL	T	Arithmétique et Théorie des Nombres.	M ^{me} TONNELAT	T	Physique Théorique.
QUELET	T	Chimie Organique.	DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.	SOUCHAY	T	Chimie générale.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.	AIGRAIN	T	Electrotechnique géné- rale.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.	BRUSSET	T	Chimie systématique.
JUNG	T	Pétrographie.	M. LÉVY	T	Physique théorique des Hautes Energies (Or- say).
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.	M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.			

(suite en dernière page)



CONSIDÉRATIONS SUR L'OBSERVATION DES FRANGES D'INTERFÉRENCES EN MICROSCOPIE *

par M^{lle} Monique GUILLARD

INTRODUCTION

On se propose d'étudier la structure des franges d'interférences examinées au microscope. La source ponctuelle est placée dans le plan focal d'un condenseur et on examine les franges à l'aide d'un microscope.

Après un rappel sur la formation des franges d'interférences et sur les conditions d'observation, nous ferons une étude, que nous essaierons de rendre complète, des corrections des interférogrammes pour une source étendue et dans les différents types d'éclairage. Les corrections seront données aussi bien dans le cas des interférences en « teinte plate » que dans le cas du coin.

Nous avons mis en évidence, dans le cas d'un coin, la formation de deux « sources secondaires » qui sont les deux images de la source données par les deux surfaces du coin et situées dans le plan focal de l'objectif.

La visibilité dépend du rapport des amplitudes des deux rayons qui interfèrent ; nous avons tenté de rétablir, par une intervention instrumentale, le rapport égal à l'unité ; plusieurs méthodes d'amélioration du contraste ont été envisagées.

Enfin, nous avons étudié l'application de ces résultats théoriques à la volumétrie et à la réfractométrie interférentielles.

Ce travail a été effectué au laboratoire de Microscopie de l'Institut d'Optique. M^r Nomarski, Maître de recherches au Centre National de la Recherche Scientifique, qui a dirigé notre travail depuis le début, voudra bien trouver ici l'expression de toute notre reconnaissance.

I. Interférences lumineuses

1. Rappel sur la formation des franges d'interférences à deux ondes [1, 2]. — Pour obtenir, à partir de deux faisceaux, un phénomène d'interférences, certaines conditions doivent être remplies. Supposons le cas de deux sources incohérentes, envoyant des vibrations incohérentes ; l'intensité résultant de la superposition de deux vibrations incohérentes est la somme des intensités des vibrations composantes ; cette superposition ne peut pas produire de phénomènes d'interférences.

* Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris et soutenue le 24 mai 1962 en vue d'obtenir le titre d'Ingénieur-Docteur.

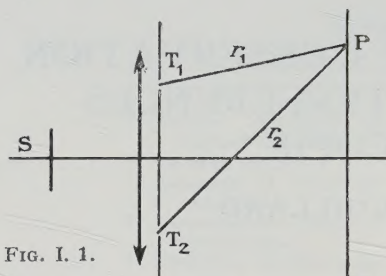


FIG. I. 1.

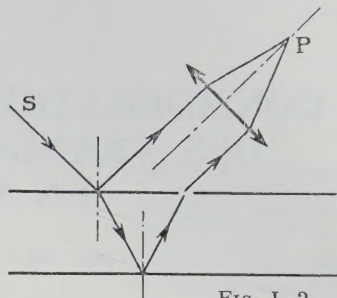


FIG. I. 2.

Pour observer un phénomène d'interférences, il est nécessaire de disposer de deux sources cohérentes, d'où la nécessité de partir d'une source unique et d'en obtenir deux images cohérentes. Les deux vibrations étant des fonctions périodiques du temps, on pourra écrire

$$y_1 = a_1 \exp[i(\omega t - \varphi_1)], \quad y_2 = a_2 \exp[i(\omega t - \varphi_2)],$$

a_1, a_2 étant les amplitudes et φ_1, φ_2 étant les phases ; seules les amplitudes complexes $a_1 \exp(-i\varphi)$ nous intéressent. La vibration résultante est une vibration sinusoïdale de même période mais d'amplitude et de phase différentes.

L'intensité résultante est donnée par

$$I = (y_1 + y_2)(y_1 + y_2)^* = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

On remarque que les points pour lesquels $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$ correspondent au maximum d'intensité $I_{\max} = (a_1 + a_2)^2$ et que les points pour lesquels $\Phi = (2k + 1)\pi$ correspondent au minimum d'intensité et donnent lieu à des franges sombres, $I_{\min} = (a_1 - a_2)^2$.

A partir de ces données on définit la *visibilité* des franges

$$V = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}) = 2a_1a_2 / (a_1^2 + a_2^2)$$

ou le *contraste* des franges

$$\gamma = (I_{\max} - I_{\min}) / I_{\max} = 4a_1a_2 / (a_1 + a_2)^2 = 4m / (1 + m)^2.$$

Le contraste dépend donc du rapport $a_2/a_1 = m$.

Des deux expressions on peut déduire la relation liant γ et V : $\gamma = 2V / (1 + V)$.

Les méthodes d'obtention de deux sources cohérentes sont nombreuses. Le dispositif le plus simple est le système de trous de Young (fig. I.4, [4] p. 86).

Franges d'une lame à faces planes et parallèles. — Considérons le cas d'une lame à faces planes et parallèles, transparente, éclairée par une source ponctuelle S (fig. I.2). Quelle que soit la position du point P, il y arrive deux rayons, l'un réfléchi sur la face supérieure, l'autre réfléchi sur la face inférieure.

Nous considérerons le phénomène d'interférences à deux ondes comme l'approximation la plus valable d'un phénomène à ondes multiples.

On peut montrer (fig. I.3) que l'amplitude due à tous les rayons s'exprime par

$$\mathcal{A} = [r_0 + r \exp(-i\varphi)] / [1 + r r_0 \exp(-i\varphi)],$$

où $r_0 = (n_0 - n_1) / (n_0 + n_1)$, $r = (n_1 - n_2) / (n_1 + n_2)$, $\varphi = 4\pi n d / \lambda$, d'où, en

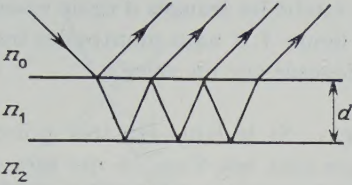


FIG. I.3.

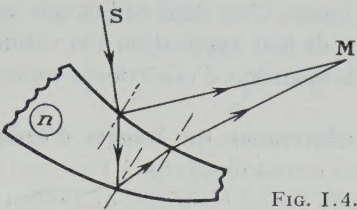


FIG. I.4.

première approximation, $\mathcal{A} \simeq r_0 + r \exp(-i \varphi)$. Tout se passe pour le deuxième rayon comme si la surface d'entrée n'existait pas.

La différence de phase est égale à $\varphi = (4 \pi / \lambda) n d \cos r$.

En tenant compte du changement de phase de π dû à la réflexion soit sur la surface supérieure, soit sur la surface inférieure on obtient $\varphi = (4 \pi / \lambda) n d \cos r + \pi$.

Les franges localisées sont infiniment étendues et les franges à l'infini sont des anneaux qui peuvent être observés soit par transmission, soit par réflexion et dont la loi de variation des diamètres est connue.

Franges des lames minces. Franges localisées sur la lame. — Considérons une lame mince à deux faces réfléchissantes non nécessairement parallèles (fig. I.4). Un point lumineux S envoie en M deux rayons susceptibles d'y produire des phénomènes d'interférences.

La différence de marche est $\delta = 2 n d \cos r$; elle est la même que celle que produirait une lame à faces parallèles ayant une épaisseur d égale à l'épaisseur de la lame prismatique au point considéré. Si la source est ponctuelle et si l'on met au point sur la lame, on observe un système de franges dues aux couples de rayons qui ont traversé la lame en des points où l'épaisseur est la même. La surface de localisation sera étudiée dans le paragraphe I.3. Les franges ainsi obtenues sont les franges d'égale épaisseur ; elles permettent d'étudier la topographie d'une lame ; elles déterminent la topographie de l'écart normal entre les

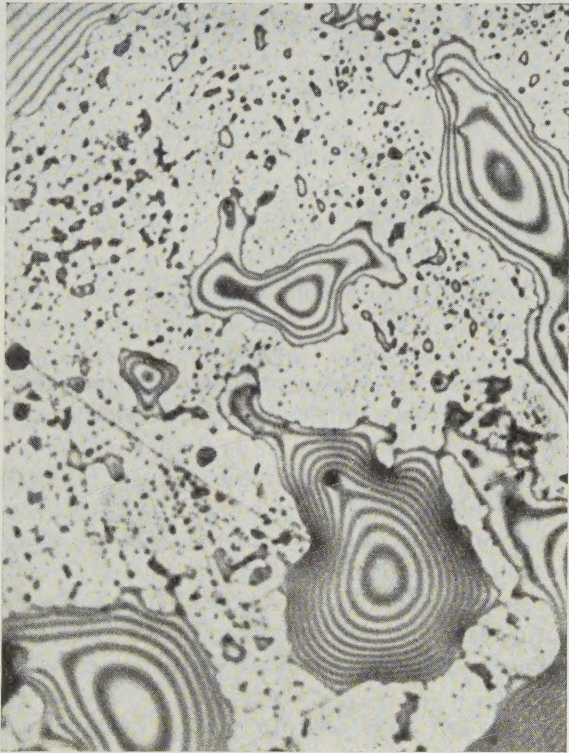


FIG. I.5.

deux ondes. C'est dans ce but que nous avons étudié les franges d'égale épaisseur en vue de leur application à la volumétrie ; la figure I.5 nous montre des franges d'égale épaisseur d'une couche mince liquide déposée sur un verre.

2. Observation des franges d'égale épaisseur. — Si la lame est très mince les franges seront observées à l'œil nu ; si les franges sont très fines, ce qui sera notre cas, elles seront observées au moyen d'un microscope de grossissement et d'ouverture numérique convenables.

D'autre part, l'examen par réflexion sera préféré à l'examen par transmission comme donnant la précision et les contrastes les meilleurs.

Nous décrirons dans le dernier chapitre les montages utilisés au cours des expériences. Mais auparavant, il nous sera utile d'étudier l'effet des rayons obliques et de l'étendue finie de la source.

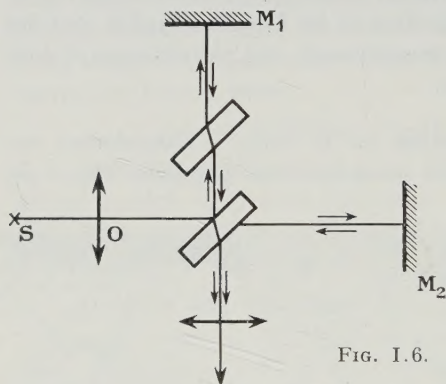


FIG. I.6.

L'interférogramme observé ne sera pas fidèle à la topographie recherchée ; on introduit une correction fonction de l'ouverture et de l'excentrement qui permet de retrouver la topographie réelle à partir des images observées au microscope.

Les différents cas peuvent toujours se ramener soit à une lame à faces parallèles, soit à un coin. Considérons, par exemple, le cas de l'interféromètre de Michelson (fig. I.6) ; lorsque les deux miroirs sont parallèles on n'observe que des anneaux à l'infini dus à une lame à faces

parallèles. Supposons que l'un des miroirs soit un peu incliné, le système est équivalent à un coin d'air : on obtient des franges d'égale épaisseur localisées sur la lame et la figure d'interférences à l'infini varie suivant l'épaisseur.

Nous étudierons donc plus spécialement ces deux cas en commençant par l'étude d'un coin d'air dans le cas le plus général.

3. Etude de la localisation des franges dans un coin d'air pour un rayon se propageant dans un plan de section principale. — Le cas d'un coin où les rayons se propagent dans un plan de section principale est un cas particulier du cas que nous traiterons ultérieurement ; mais ce cas est le plus simple. Le plan de section principale est un plan perpendiculaire à l'arête du coin. Dans ce cas très particulier le rayon réfléchi sur la première face et le rayon réfléchi sur la face inférieure sont dans le même plan du fait que le plan de section principale contient la normale à la deuxième face. Par conséquent il nous suffira de raisonner dans le plan de section principale. Les résultats seront établis pour un coin travaillant par transmission et ensuite un coin travaillant par réflexion.

1. Calcul de la déviation entre le rayon directement transmis et le rayon réfléchi deux fois (fig. I.7). — Sur la figure on voit immédiatement que, si on appelle δ la déviation on obtient $\delta = 2\alpha$, si α est l'angle du coin. On en déduit donc que la

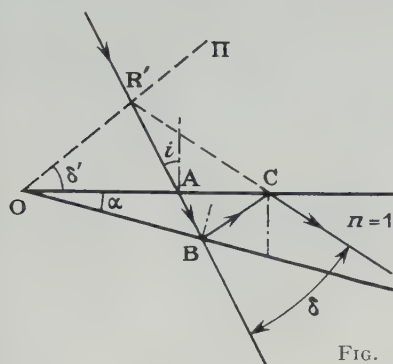


FIG. I.7.

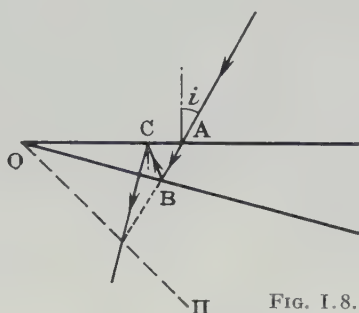


FIG. I.8.

déviante est indépendante de l'angle d'incidence. Seule varie la position du plan de localisation. On peut montrer que le résultat est le même pour un coin par réflexion.

2. *Position du plan de localisation.* — La surface de localisation des franges est le lieu des points de rencontre des rayons interférents provenant d'un même rayon incident. Pour chercher la surface de localisation nous appliquerons cette définition. Considérons en premier lieu un coin par transmission. Nous devons envisager les deux cas des figures I.7 et I.8. Le rayon incident donne lieu au rayon directement transmis et au rayon réfléchi deux fois.

a) *Cas où $i > 0$.* — Posons $OA = \rho$, $AR' = \rho \sin(i + \alpha)/\cos \alpha$, d'où

$$\operatorname{tg} \delta' = \operatorname{tg}(i + \alpha), \quad \delta' = i + \alpha.$$

On remarque donc que le plan de localisation est perpendiculaire au plan bissecteur des deux rayons directement transmis et réfléchi deux fois. Le plan de localisation est le bissecteur des deux surfaces d'onde ; il tourne en même temps que l'onde incidente.

b) *Cas où $i < 0$.* — Le calcul sera le même que dans le cas précédent et donnera un résultat identique.

En conclusion, la surface de localisation pour un coin par transmission est un plan ; ce plan est le plan bissecteur des deux surfaces d'onde. Dans le cas de l'incidence normale on obtient $\delta' = \alpha$, donc le plan de localisation sera le plan symétrique de la deuxième face du coin par rapport à la première. Nous pouvons donc résumer ces résultats sur la figure I.9.

Envisageons maintenant le cas d'un coin par réflexion. Nous pouvons reprendre des calculs identiques au cas du coin par transmission. Sur la figure I.10a nous trouvons, en posant $OA = \rho$,

$$AB = \rho \sin \alpha / \cos(i - \alpha),$$

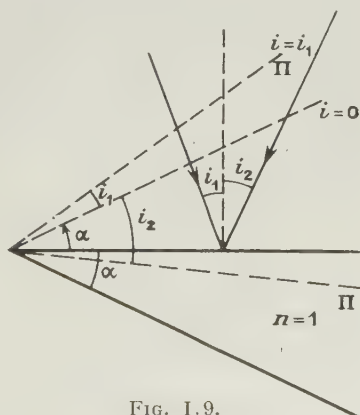


FIG. I.9.

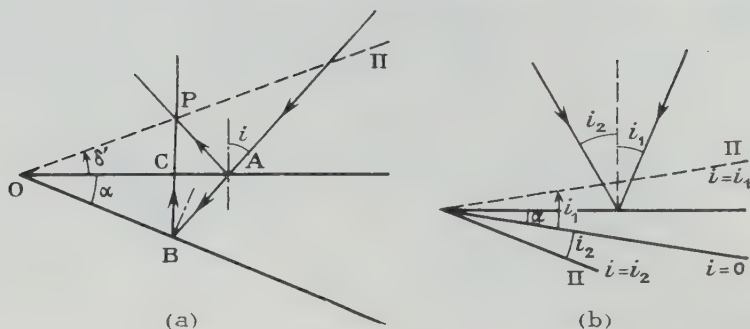


FIG. I.10.

$$BC = \frac{\rho \sin \alpha \cos i}{\cos(i - 2\alpha) \cos(i - \alpha)}, \quad AC = \frac{2 \sin(i - \alpha) \rho \sin \alpha}{\cos(i - 2\alpha)},$$

d'où la surface de localisation sera, dans ce cas aussi, un plan dont l'angle δ' avec la surface d'entrée est égale à $\delta' = i - \alpha$. Donc dans le cas du coin travaillant par réflexion, aussi bien que dans le cas du coin par transmission le plan de localisation est le plan bissecteur des deux surfaces d'onde (d'où la position des plans de localisation, fig. I.10b). En incidence normale sur la première surface rencontrée pour un coin travaillant par réflexion, la surface de localisation est la face inférieure du coin (ceci se vérifie immédiatement sur la figure).

La position de la surface de localisation aurait pu être obtenue d'une autre manière : la surface de localisation est la surface pour laquelle le retard δ (différence de marche) reste stationnaire autour de la valeur de l'angle i donc lorsque la dérivée de δ par rapport à i s'annule.

Considérons par exemple le cas d'un coin par réflexion (fig. I.11) et soit P le point de coordonnées x, y, z où l'on veut étudier l'état d'interférences ; les amplitudes des rayons réfléchis sont :

$$y_1 = a_1 \exp(-i\varphi_1), \quad y_2 = a_2 \exp(-i\varphi_2),$$

avec

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{O_1 N'_1}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 N'_2}).$$

En calculant successivement φ_1 et φ_2 on obtiendra la différence de phase

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \{ -x \sin \alpha \cos(i - \alpha) + l \cos(i - \alpha) + z [\cos \alpha \cos(i - \alpha) - \cos i] \}.$$

En faisant un changement de variables de manière à ramener l'origine des coordonnées sur l'arête du coin,

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \{ -x' \sin \alpha \cos(i - \alpha) + z [\cos \alpha \cos(i - \alpha) - \cos i] \}.$$

La localisation n'est pas définie si l'ouverture est infiniment faible ; on introduit une petite variation : i est la direction moyenne, l'incidence est comprise entre $i + di$ et $i - di$.

$$z = x \operatorname{tg}(i - \alpha).$$

La différence de marche sera $2d \cos i$. Etudions maintenant le problème de la

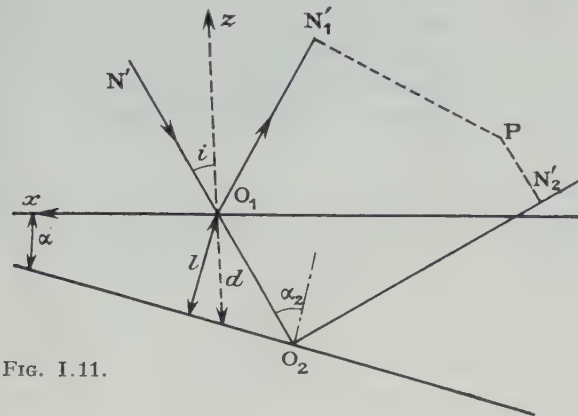


FIG. I.11.

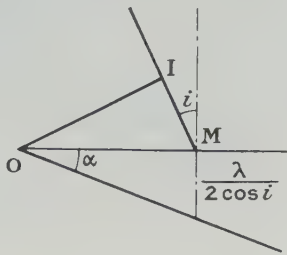


FIG. I.12.

variation de l'interfrange. En incidence normale la différence de marche sera égale à $2e$ (si l'on considère le cas d'un coin d'angle faible) ; donc les franges brillantes seront données par $\Delta = k\lambda$, soit pour des épaisseurs $e = k\lambda/2$. Les franges sont parallèles à l'arête du coin. Dans le cas d'un coin par transmission la première frange est brillante et se situe sur l'arête du coin. Dans le cas d'un coin par réflexion le système de franges obtenu est complémentaire du système par transmission.

L'interfrange dans le plan de localisation a pour valeur $I = \lambda/2 \alpha$. Dans le cas de l'incidence oblique la première frange aura lieu pour une épaisseur $e = \lambda/2 \cos i$. Calculons la valeur de l'interfrange dans le plan de localisation faisant un angle $i + \alpha$ avec la première face du coin ; on trouve, sur la figure I.12, $OI = \lambda/2 \alpha$. Par conséquent, l'interfrange est constant dans le plan de localisation quand l'angle d'incidence varie ; la rotation du plan de localisation avec l'angle d'incidence entraîne donc l'effet de variation de l'interfrange.

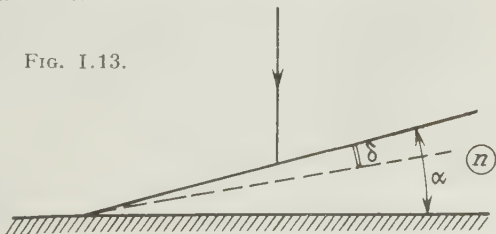
L'interfrange n'est défini que pour une valeur de l'incidence i ; dans les plans autres que la surface de localisation les franges sont brouillées. D'autre part, si on change l'angle d'incidence sans changer la mise au point on va assister à une variation apparente de l'interfrange.

La mesure de l'interfrange sera faite dans un plan perpendiculaire à l'axe du microscope : il faudra donc tenir compte de l'angle d'inclinaison de la surface de localisation avec l'axe du microscope (on n'est pas maître de la surface de localisation ; on verra ceci ultérieurement dans le cas des gouttes). Par conséquent, l'interfrange qui est égal à $\lambda/2 \alpha$ dans le plan de localisation devient, lorsque l'on pointe perpendiculairement à l'axe du microscope, $OM = OI/\cos i = \lambda/2 \alpha \cos i$.

Lorsque l'angle d'incidence augmente les franges s'écartent si la mise au point est effectuée sur la face supérieure du coin.

4. Position du plan de localisation pour un coin d'indice n . — 1. On ne considère que le cas d'un coin observé en lumière réfléchie (microscope inversé, fig. I.13). La position du plan de localisation sera déterminée par une méthode identique

FIG. I.13.



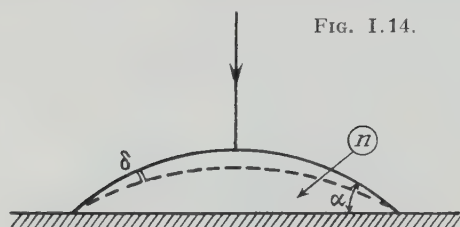


FIG. I. 14.

au cas du coin d'air. Supposons que l'angle α du coin soit petit. Le plan de localisation fait, avec la première face du coin, un angle δ donné par

$$\delta = \frac{\alpha}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

On retrouve immédiatement le cas du coin d'air $n = 1$. Le plan de localisation

est la première face du coin.

2. *Application aux gouttes.* — Soit une goutte d'indice n . Elle peut être considérée comme une succession de coins d'indice n et par continuité on pourra déterminer la position de la surface de localisation (fig. I. 14).

II. Etude d'un coin d'air pour un rayon se propageant en dehors du plan de section principale

Nous nous proposons d'étudier l'influence de l'étendue de la source sur les franges d'interférences produites par un coin d'air. Une telle source se décompose en sources ponctuelles produisant des éclairages cohérents obliques ; pour tous les azimuts, sauf celui du plan de section principale du coin d'air observé, les rayons se propagent en dehors du plan de section principale. Ceci entraîne certaines difficultés dues au fait que les deux rayons interférents se propagent dans des plans différents. Nous serons amenée à faire un calcul vectoriel qui nous permettra d'obtenir la déviation entre les deux rayons ainsi que la direction des rayons.

Considérons la figure II. 1. Une source étendue S est située dans le plan focal F_c du condenseur C . Les franges seront observées au moyen d'un microscope dont O est l'objectif. Nous supposons dans notre première étude que le condenseur et l'objectif sont aplanétiques. Dans le plan focal F'_o de l'objectif se forme l'image réelle de la source étendue ; nous verrons que dans la pupille F'_o on observe deux images de la source, l'une due aux rayons tels que $O_1N'_1$ (fig. I. 11), l'autre due aux rayons tels que $O_2N'_2$.

Dans le cas d'un coin d'air nous n'aurons que des réflexions et non pas des réfrac-

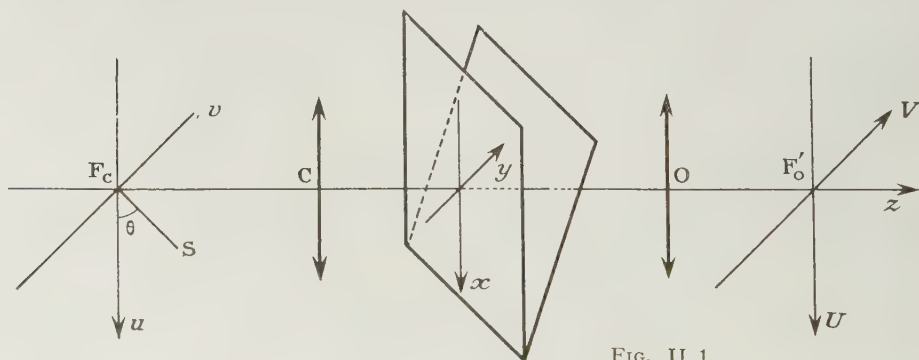


FIG. II. 1.

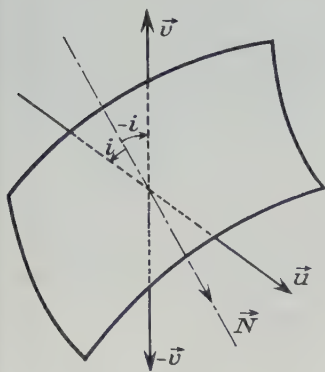


FIG. II.2.

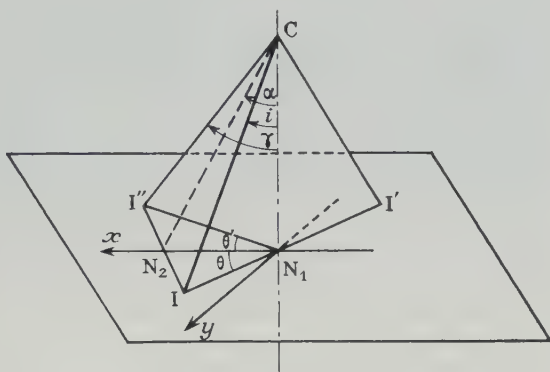


FIG. II.3.

tions. Le coin d'air est constitué par deux surfaces semi-réfléchissantes et sans épaisseur ; ainsi évite-t-on la réfraction.

Géométrie de la réflexion en notations vectorielles [3]. — Nous devons donner ici les expressions vectorielles des lois de Descartes relatives à la réflexion. Supposons une surface réfléchissante (fig. II.2) et soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{N}$ les vecteurs unitaires portés respectivement par les rayons incident, réfléchi et par la normale à la surface. Nous devons écrire que les trois vecteurs sont coplanaires et, d'autre part, que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion soit $\vec{u} \cdot \vec{N} = -\vec{v} \cdot \vec{N}$; le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est colinéaire à $\vec{N}$, donc $\vec{u} - \vec{v} = a \vec{N}$ soit, en multipliant scalairement par $\vec{N}$, $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{N} = a$; or $a = 2 \cos i$, d'où l'expression vectorielle de la réflexion

$$(1) \quad \vec{u} - \vec{v} = 2 \vec{N} \cos i.$$

1. Calcul de la déviation entre les deux rayons et de la différence de phase. —

1. Calcul de la déviation. — Nous devons nous fixer un certain nombre de données et préciser les variables que nous allons utiliser. Dans le plan de la source (plan focal du condenseur) nous prendrons deux axes de coordonnées rectangulaires u et v et des coordonnées polaires θ , h ; l'angle d'incidence provenant d'un point (θ, h) est donné par $h = f \sin i$.

Dans le plan de la première face du coin nous prendrons deux axes de coordonnées x et y parallèles aux axes u , v . L'arête du coin sera choisie perpendiculaire à l'axe des x . D'autre part nous supposons que la face d'entrée du coin est perpendiculaire à l'axe optique du microscope. Les axes de coordonnées ont été choisis dans le plan de la première face du coin supposée perpendiculaire à l'axe du microscope (c'est le cas pour l'observation en lumière transmise ainsi que pour un microscope par réflexion inversé). Le meilleur résultat aurait été obtenu en plaçant le plan de localisation perpendiculairement à l'axe du microscope ; d'après la figure I.10, on remarque la position à donner au coin, d'où impossibilité expérimentale.

D'autre part dans le plan de la pupille de sortie F'_0 nous prendrons deux axes U et V .

La figure II.3 nous donne le schéma. Une source élémentaire, placée dans le

plan focal du condenseur, envoie un faisceau de rayons parallèles dont la direction est donnée par les angles θ et i , où l'angle i représente l'angle d'incidence des rayons sur le coin. La direction des rayons incidents est matérialisée par la droite CI . D'autre part le rayon réfléchi sur la première face sera dans le plan CIN_1 . La normale CN_2 à la face inférieure du coin est dans le plan zx . Le rayon réfléchi sur la deuxième face sera contenu dans le plan CIN_2 .

On écrit les cosinus directeurs des différents vecteurs : $\overrightarrow{CN_2}(\sin \alpha, 0, -\cos \alpha)$; $\overrightarrow{CN_1}(0, 0, -1)$; $\overrightarrow{CI}(\sin i \cos \theta, \sin i \sin \theta, -\cos i)$. En appliquant la relation (1) nous obtenons les cosinus directeurs du rayon réfléchi sur la première face, $\overrightarrow{CI}'(-\sin i \cos \theta, -\sin i \sin \theta, -\cos i)$. L'angle d'incidence sur la deuxième face, soit l'angle N_2CI , est tel que

$$\cos \widehat{N_2CI} = \cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta,$$

d'où les cosinus directeurs du rayon CI'' réfléchi sur la deuxième face :

$$-\sin i \cos \theta + 2 \sin \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta), \quad -\sin i \sin \theta, \\ \cos i - 2 \cos \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta).$$

D'où l'on tire la déviation entre $\overrightarrow{CI}'$ et $\overrightarrow{CI}''$:

$$\cos \delta = \sin^2 i + \cos^2 i \cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 i \cos^2 \theta.$$

Considérons le cas où l'angle α est petit,

$$\cos \delta = 1 - 2\alpha^2 \cos^2 i - 2\alpha^2 \sin^2 i \cos^2 \theta, \quad \delta^2 \simeq 4\alpha^2 \cos^2 i + 4\alpha^2 \sin^2 i \cos^2 \theta,$$

$$\boxed{\delta \simeq 2\alpha \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \cos^2 \theta}}.$$

On peut vérifier aisément que si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, c'est-à-dire pour un rayon se propageant dans un plan de section principale, $\delta = 2\alpha$. Ce résultat avait été trouvé au chapitre précédent.

Dans le cas d'un coin travaillant par transmission, on retrouve le même résultat ; la déviation reste donc la même.

2. Calcul de la différence de marche. — Reprenons le cas de la figure II.3. Nous voulons calculer la différence de marche introduite par le coin en un point P de coordonnées x, y, z ; dans le cas général les amplitudes des rayons interférents sont :

$$y_1 = a_1 \exp(-i\varphi_1), \quad y_2 = a_2 \exp(-i\varphi_2).$$

La différence de phase au point P sera égale à $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ avec

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{O_1N'_1}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (\overline{O_1O_2} + \overline{O_2N'_2}).$$

Posons $k = 2\pi/\lambda$; N'_1 et N'_2 sont les projections de P sur les rayons interférents (fig. I.11). Faisons un changement de coordonnées de façon à prendre pour nouvel axe des x' la projection du rayon O_1N' sur la face d'entrée du coin. Comme dans le calcul de la déviation des rayons, le calcul de la différence de phase sera effectué vectoriellement. Dans ce nouveau système d'axes les cosinus directeurs seront transformés par la rotation.

$$\overrightarrow{CN_2}(\sin \alpha \cos \theta, -\sin \alpha \sin \theta, -\cos \alpha) ; \overrightarrow{CI}(\sin i, 0, -\cos i).$$

En appliquant la relation (1) on trouve

$\overrightarrow{O_2 N'_2}(\sin i - 2 \sin \alpha \cos \theta \cos \alpha_2, 2 \sin \alpha \sin \theta \cos \alpha_2, 2 \cos \alpha \cos \alpha_2 - \cos i)$, avec $\cos \alpha_2 = \cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta$, soit en calculant la différence de marche $\delta = \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 N'_2} - \overrightarrow{O_1 N'_1}$,
 $\delta = -x' \sin \alpha \cos \theta \cos \alpha_2 + l \cos \alpha_2 + y' \sin \alpha \sin \theta \cos \alpha_2 + z' (\cos \alpha \cos \alpha_2 - \cos i)$.

En revenant aux coordonnées x, y, z (axe des x perpendiculaire à l'arête du coin) on obtient pour valeur de la différence de phase

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} [-x \sin \alpha \cos \alpha_2 + l \cos \alpha_2 + z (\cos \alpha \cos \alpha_2 - \cos i)] ,$$

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta .$$

La formule est compliquée du fait du choix des axes ; elle se simplifierait dans le cas où le plan de localisation serait perpendiculaire à l'axe optique.

La connaissance de la différence de phase nous permettra de calculer l'intensité des franges d'interférences. En effet, supposons, pour commencer, que les amplitudes a_1 et a_2 soient égales ;

$$y_1 = a \exp(-i\varphi_1), \quad y_2 = a \exp(-i\varphi_2).$$

Nous avons vu au premier chapitre que l'intensité du phénomène résultant des interférences était donnée par la relation

$$I = 2a^2(1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2(\varphi/2).$$

De plus, nous pouvons retrouver les résultats des cas particuliers : pour le plan principal

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \{ -x \sin \alpha \cos(i - \alpha) + l \cos(i - \alpha) + z [\cos \alpha \cos(i - \alpha) - \cos i] \}.$$

2. Position des sources secondaires dans le cas d'un instrument aplanétique. —

Après réflexion ou transmission par le coin d'air, nous avons deux séries de rayons. Supposons, par exemple, un coin travaillant par réflexion. Pour une source ponctuelle (θ, i) le condenseur donne un faisceau de rayons parallèles reçus par la face d'entrée du coin sous l'incidence i . Les rayons sont réfléchis par la face supérieure du coin suivant une direction dont nous avons calculé les cosinus directeurs :

$$\vec{CI}'(-\sin i \cos \theta, -\sin i \sin \theta, -\cos i).$$

Ces rayons, formant un faisceau parallèle, pénètrent dans l'objectif de microscope et forment dans son plan focal F'_0 une source secondaire (en U, V).

D'autre part, les rayons pénètrent dans le coin et sont réfléchis par la face inférieure du coin. Ils sont réfléchis suivant une direction

$$\vec{CI}''(-\sin i \cos \theta + 2 \sin \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta), -\sin i \sin \theta, \cos i - 2 \cos \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta)).$$

Ces rayons forment dans le plan focal de l'objectif une deuxième image distincte de la première image de la source. Nous avons une infinité de couples de rayons cohérents. Nous allons étudier la position de ces deux sources dans le cas d'un instrument aplanétique.

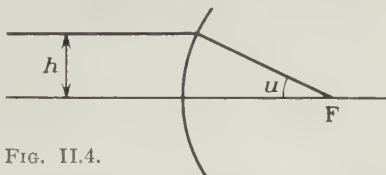


FIG. II.4.

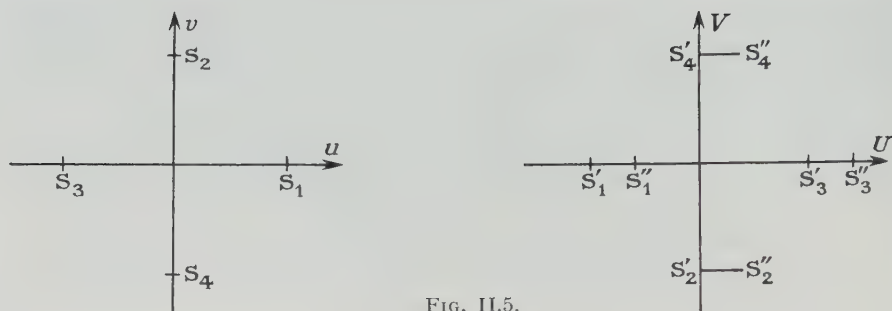


FIG. II.5.

Dans le cas particulier d'un objectif et d'un condenseur aplanétiques (fig. II.4), la hauteur d'incidence et la longueur focale sont liées par la relation $h = f \sin u$, si $\sin u$ est l'ouverture numérique.

En tenant compte des notations de la figure II.1 on pourra écrire

$$F_0 N_2 = f_0 \sin \alpha \quad (\text{ON}_2 \text{ est la normale à la deuxième face du coin}),$$

$$F_0 S'_2 = f_0 \sin \gamma, \quad F_0 S_1 = f_0 \sin i;$$

S'_2 est l'image de la source par réflexion sur la face inférieure du coin. L'image S'_1 par réflexion sur la face supérieure du coin est symétrique du point S_1 par rapport au point F_0 . Les coordonnées du point S_1 sont donc :

$$U = f_0 \sin i \cos \theta, \quad V = f_0 \sin i \sin \theta,$$

d'où les coordonnées du point S'_1 : $U = -f_0 \sin i \cos \theta$, $V = -f_0 \sin i \sin \theta$.

Soit γ l'angle que fait la direction OS'_2 avec l'axe Oz . Les coordonnées du point S'_2 nous sont données par $U = f_0 \sin \gamma \cos \theta'$, $V = f_0 \sin \gamma \sin \theta'$. En introduisant l'angle γ , le vecteur $\vec{CI}''$ est défini par

$$\vec{CI}'' (\sin \gamma \cos \theta', \sin \gamma \sin \theta', -\cos \gamma),$$

d'où les coordonnées du point S'_2 sont déterminées :

$$S'_1 \begin{cases} U = -f_0 \sin i \cos \theta \\ V = -f_0 \sin i \sin \theta \end{cases} \quad S'_2 \begin{cases} U = f_0 (\sin 2\alpha \cos i - \cos 2\alpha \sin i \cos \theta) \\ V = -f_0 \sin i \sin \theta \end{cases}$$

D'après ces formules on remarque que les deux sources S'_1 et S'_2 ont la même ordonnée et, par conséquent, il n'y aura pas de rotation du système de franges pour un instrument aplanétique.

Nous pouvons donner une représentation graphique dans le plan focal de l'objectif de la position des deux images, dans différents cas particuliers (fig. II.5). La source placée dans le plan de section principale donne lieu à deux cas ($\theta = 0$, $\theta = \pi$).

a) $\theta = 0$. La source est dans le plan de section principale ($i > 0$ du chap. II) :

$$S'_1 (U = -f_0 \sin i, V = 0); \quad S'_2 [U = -f_0 \sin (i - 2\alpha), V = 0].$$

Ce résultat est d'ailleurs évident et n'exige aucun calcul.

b) $\theta = \pi$. Source ponctuelle dans le plan de section principale ($i < 0$) :

$$S'_1 (U = f_0 \sin i, V = 0); \quad S'_2 [U = f_0 \sin (i + 2\alpha), V = 0].$$

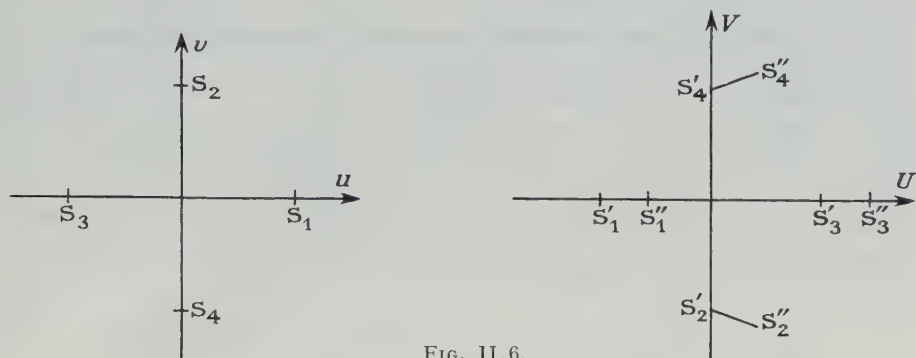


FIG. II.6.

3. Position des sources secondaires dans le cas d'un instrument obéissant à une loi en tangentes. — La relation des sinus est remplacée par la relation $h = f \operatorname{tg} u$. Cette relation n'a pas d'intérêt pratique puisque dans l'approximation de Gauss on écrit $h = f u$. Nous allons cependant exécuter un calcul comparatif étant donné que cette loi a été traitée par certains auteurs pour calculer les phénomènes d'interférences et de diffraction [7].

Le calcul des coordonnées dans ce cas nous donne les résultats suivants :

$$S'_1 \begin{cases} U = -f_0 \operatorname{tg} i \cos \theta \\ V = -f_0 \operatorname{tg} i \sin \theta \end{cases} \quad S'_2 \begin{cases} U = f_0 (\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} i \cos \theta) / (1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} i \cos \theta) \\ V = -f_0 \operatorname{tg} i \sin \theta / (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \sin i \cos \theta) \end{cases}$$

Les deux images S'_1 et S'_2 n'ont ni la même ordonnée ni la même abscisse ; on constate une rotation des deux images l'une par rapport à l'autre, ce qui entraînerait une rotation du système de franges d'interférences.

De même que dans le cas précédent on va représenter graphiquement les positions respectives des sources S'_1 et S'_2 (fig. II.6) :

$\theta = 0$ (plan de section principale) $i > 0$

$$S'_1 \begin{cases} U = -f_0 \operatorname{tg} i \\ V = 0 \end{cases} \quad S'_2 \begin{cases} U = -f_0 \operatorname{tg} (i - 2\alpha) \\ V = 0 \end{cases}$$

$\theta = \pi$ (plan de section principale) $i < 0$

$$S'_1 \begin{cases} U = f_0 \operatorname{tg} i \\ V = 0 \end{cases} \quad S'_2 \begin{cases} U = f_0 \operatorname{tg} (i + 2\alpha) \\ V = 0 \end{cases}$$

$\theta = \pi/2$ (perpendiculaire au plan de section principale)

$$S'_1 (U = 0, V = -f_0 \operatorname{tg} i); \quad S'_2 (U = f_0 \operatorname{tg} 2\alpha, V = -f_0 \operatorname{tg} i / \cos 2\alpha).$$

Prenons le cas particulier de l'approximation de Gauss (α et i sont petits). On négligera les termes en α^2 et i^2 . Les coordonnées deviennent

$$S'_1 (U = -f_0 i \cos \theta, V = -f_0 i \sin \theta); \\ S'_2 [U = f_0 (2\alpha - i \cos \theta), V = -f_0 i \sin \theta].$$

Il n'y aura plus de rotation du système de franges. Ceci est logique du fait que dans cette approximation on se retrouve dans le même cas qu'un instrument aplanétique.

III. Eclairage semi-cohérent (sources de dimensions finies)

1. **Rôle joué par les deux sources secondaires.** — Nous avons vu l'existence dans le plan focal F'_0 de l'objectif de deux sources secondaires. Il faudra *que les deux sources ne soient pas obturées* par le contour de la pupille de l'objectif et nous supposerons que la pupille est à transparence uniforme.

Nous voulons calculer la répartition des amplitudes $\mathcal{A}(x', y')$ dans le plan de l'image du microscope ; il nous suffira pour cela d'appliquer la transformation de Fourier à la répartition d'amplitude dans le plan de la pupille

$$\mathcal{A}(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(U, V) \exp[-i k (U x' + V y')] dU dV$$

et la répartition de l'intensité dans l'image est donnée par

$$I(x', y') = \mathcal{A}(x', y') \mathcal{A}^*(x', y').$$

1. **Source ponctuelle.** — Les deux relations vont nous permettre de calculer la répartition de l'intensité dans le cas d'une source ponctuelle. En effet la répartition de l'amplitude $F(U, V)$ est une fonction nulle partout sauf aux deux points trouvés et dont les coordonnées sont données par :

$$S'_1 \begin{cases} U_1 = -f_0 \sin i \cos \theta \\ V_1 = -f_0 \sin i \sin \theta \end{cases} \quad S'_2 \begin{cases} U_2 = f_0 (\sin 2\alpha \cos i - \cos 2\alpha \sin i \cos \theta) \\ V_2 = -f_0 \sin i \sin \theta \end{cases}$$

Le calcul de la transformée de Fourier est immédiat

$$\begin{aligned} A(x', y') &= \iint e^{ik(Ux' + Vy')} dU dV = \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} (V_1 y' + U_1 x') \right] + \\ &+ \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} (V_2 y' + U_2 x') \right] = \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} p \right) + \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} q \right), \end{aligned}$$

d'où l'intensité en prenant une distance de l'objet égale à 1

$$I = 2 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (p - q) \right] = 4 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (p - q),$$

$$I = 4 I_0 \cos^2 \left[\frac{2\pi}{\lambda} f_0 \sin \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta) \right].$$

Le système de franges obtenu est une série de franges parallèles à l'arête du coin. La position des franges brillantes est donnée par

$$\frac{2\pi}{\lambda} f_0 \sin \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta) = N \pi,$$

d'où la valeur de l'interfrange :

$$\text{interfrange} = \lambda / 2 f_0 \sin \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta).$$

Pour une source ponctuelle placée au centre F_c , soit en incidence normale, on aura

$$I = 4 I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} f_0 x' \sin 2\alpha \right) = 2 I_0 (1 + \cos k f_0 x' \sin 2\alpha).$$

La loi de répartition obtenue est la loi habituelle. Envisageons maintenant le cas d'une source étendue. Supposons une source ponctuelle dans le plan de section principale. Elle donne lieu à deux ondes. Dans le plan de l'objet l'amplitude $G(x)$ sera

$$G(x) = a_1(t) \{ \exp(-i 2 \pi x \sin i) + \exp[-i 2 \pi x \sin (i + 2 \alpha)] \}.$$

Dans le plan de la pupille, il suffira de prendre la transformée de Fourier en prenant x et $\sin i$ comme variables

$$F(\sin i) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \exp(i 2 \pi x \sin i) dx = \{ \delta(\sin i) + \delta[\sin (i + 2 \alpha)] \} a_1(t),$$

où δ est la fonction de Dirac. Soit, dans le plan image,

$$G(x') = a_1(t) \{ \exp(-i 2 \pi x' \sin i) + \exp[-i 2 \pi x' \sin (i + 2 \alpha)] \}.$$

Pour une autre source ponctuelle,

$$G(x'_2) = a_2(t) \{ \exp(-i 2 \pi x'_2 \sin i) + \exp[-i 2 \pi x'_2 \sin (i + 2 \alpha)] \};$$

or, comme $a_1 a_2^* = 0$, on obtient

$$I_{1,2} = |G_1|^2 + |G_2|^2.$$

On doit intégrer le phénomène obtenu pour toute la source supposée uniforme. Soit ds l'élément de surface; son expression en fonction des coordonnées employées est $ds = f_c^2 \sin i \cos i di d\theta$. Nous n'envisagerons que les cas où l'angle α est faible et l'on négligera les termes en α^2 , d'où l'expression de l'intensité

$$I = 2 I_0 f_c^2 \iint [1 + \cos (X \cos i)] \sin i \cos i di d\theta,$$

avec $X = (4\pi/\lambda) \alpha x' = 2 k \alpha x'$. Nous supposerons que la longueur focale unitaire X exprime, en unités optiques, la déviation entre les deux rayons.

2. Source circulaire centrée sur l'axe optique. — Dans le cas d'une source circulaire centrée, le domaine d'intégration est un cercle de rayon $f_c \sin i$, si $\sin i$ est l'ouverture, d'où l'intégrale à calculer

$$I = 2 I_0 \int_0^i \int_0^{2\pi} \sin i \cos i di d\theta + 2 I_0 \int_0^i \int_0^{2\pi} \cos (X \cos i) \sin i \cos i di d\theta.$$

Après avoir effectué l'intégration nous trouverons le résultat suivant :

$$I = I_0 \pi \left[1 - \cos 2i + \frac{4}{X} \sin X - \frac{4}{X} \sin (X \cos i) \cos i + \right. \\ \left. + \frac{4}{X^2} \cos X - \frac{4}{X^2} \cos (X \cos i) \right].$$

Les courbes montrant les variations de l'intensité en fonction de X sont tracées dans différents cas particuliers (fig. III.1) : $i = 0$, $\sin i = 1/2$, $\sin i = 0,866$, $\sin i = 1$.

Pour $\sin i = 1/2$ l'expression de l'intensité se ramène à

$$I = I_0 \pi \left[\frac{1}{2} + \frac{4}{X} \sin X - \frac{4}{X} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} X \right) + \frac{4}{X^2} \cos X - \frac{4}{X^2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} X \right) \right].$$

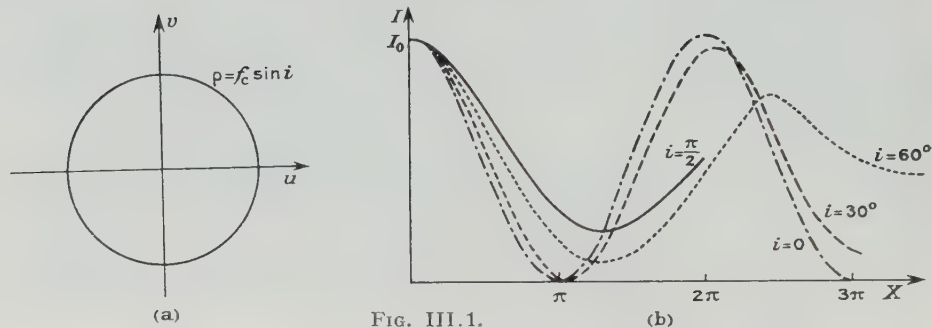


FIG. III.1.

(b)

Nous donnerons (tableau I) quelques valeurs de I pour diverses valeurs de X .

TABLEAU I

X	$30^\circ = \pi/6$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	0	3π
$I/\pi I_0$	0,96	0,532	0,02	0,363	0,945	1	0,120

Nous constatons sur la figure III.1b que le contraste diminue quand on augmente l'ouverture du condenseur ; les minima ne s'annulent plus ; d'autre part l'interfrange augmente quand on augmente l'ouverture : les franges deviennent plus espacées. L'intensité maximum diminue.

2. Recherche des « images » pupillaires dans différents cas. — A un point (θ, i) de la source correspondent deux points dans la pupille de sortie de l'objectif. On va déterminer les images pupillaires constituées par les ensembles de ces points pour des sources de formes différentes. Ces images seront utilisées ultérieurement quand nous étudierons l'effet d'obliquité sur les franges d'interférences. La détermination de ces images est nécessaire pour calculer la loi des franges dans le cas général d'une source centrée ou excentrée.

Lorsque l'angle d'incidence est i , l'écart angulaire entre les deux rayons est égal à

$$\cos \delta = \sin^2 i + \cos^2 i \cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 i \cos^2 \theta.$$

Une limite sera imposée ; il faudra que $i + \delta < \pi/2$. En effet dans le cas contraire le rayon sera renvoyé (il y aura réflexion totale). Pour une source ponctuelle placée dans le plan de section principale $\delta = 2\alpha$, donc $i + 2\alpha < \pi/2$.

1. Cas d'une source circulaire centrée. — Nous envisagerons, en premier lieu, le cas d'une source circulaire centrée sur l'axe du système condenseur-objectif. D'autre part, nous ne considérerons désormais que le cas où le condenseur et l'objectif sont aplanétiques.

Soit une source circulaire centrée de rayon $\rho_1 = f \sin i$ et placée dans le plan focal du condenseur. Cherchons la forme de l'image directe obtenue sans tenir compte du coin. A un point (θ, i) de la source correspond, dans le plan de la pupille de sortie, un point S'_1 de coordonnées $U = -f_0 \sin i \cos \theta$, $V = -f_0 \sin i \sin \theta$. L'image directe

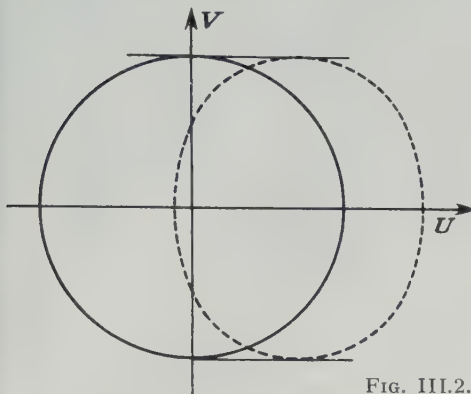


FIG. III.2.

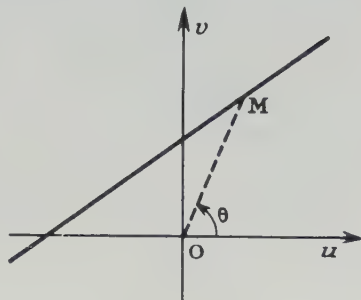


FIG. III.3.

est donc un cercle centré sur l'axe condenseur-objectif et de rayon $\rho' = (f_0/f_c) \rho_1$. Les rayons sont dans le rapport des longueurs focales de l'objectif et du condenseur.

Cherchons la forme de la deuxième image. A un point (θ, i) de la source correspond dans le plan de la pupille de sortie un point S'_2 de coordonnées

$$U = f_0 (\sin 2\alpha \cos i - \sin i \cos 2\alpha \cos \theta), \quad V = -f_0 \sin i \sin \theta.$$

En éliminant i entre U et V nous obtiendrons le lieu du point S'_2 . Nous trouvons comme image une ellipse d'équation

$$\frac{(U-a)^2}{b^2} + \frac{V^2}{\rho_1^2} = 1,$$

avec $a = \sin 2\alpha \sqrt{1 - (\rho_1^2/f_c^2)}$, $b = (\rho_1/f_c) \cos 2\alpha$.

L'ellipse est centrée au point $U = \sin 2\alpha \sqrt{1 - (\rho_1^2/f_c^2)}$, $V = 0$. Nous connaissons la longueur des axes : sur l'axe des U , $(f_0 \rho_1/f_c) \cos 2\alpha$ et sur l'axe des V , $\rho_1(f_0/f_c)$. L'ellipse est donc obtenue à partir d'un cercle par une affinité suivie d'une translation. En effet l'axe suivant l'axe des V est égal au rayon du cercle. La deuxième image est donc déformée suivant une seule direction. La translation ainsi que la déformation dépendent de l'angle α du coin. Nous pouvons montrer sur un schéma la position des deux images l'une par rapport à l'autre (fig. III.2).

Dans le cas particulier où le condenseur et l'objectif ont la même longueur focale l'équation de l'ellipse devient

$$\frac{(U - f_0 a)^2}{\rho_1^2 \cos^2 2\alpha} + \frac{V^2}{\rho_1^2} = 1.$$

2. La source est une fente de longueur finie. — Nous prendrons d'abord le cas d'une fente non centrée. Nous sommes obligée de limiter sa longueur. Soit (fig. III.3) la disposition de la fente dans le plan de la pupille d'entrée (plan focal du condenseur). Nous prendrons l'équation de la fente sous la forme $v = au + b$ mais avec la restriction $OM = f_c \sin i$. Nous allons dans ce cas chercher les deux images de la fente.

Equation de l'image directe : à partir des coordonnées du point S'_1 on trouve aisément l'équation de l'image directe $V = aU - b(f_0/f_c)$. L'image directe est donc une fente parallèle à la fente-source. De même que pour la fente-source la

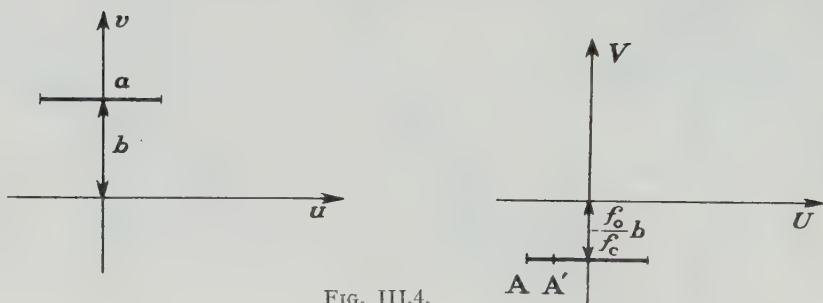


FIG. III.4.

longueur est limitée.

Intéressons-nous au cas de l'image donnée par la deuxième face du coin. En partant des coordonnées du point S'_2 ,

$$U = f_o (\sin 2\alpha \cos i - \cos 2\alpha \sin i \cos \theta), \quad V = -f_o \sin i \sin \theta,$$

nous obtenons l'équation de la courbe-image

$$\frac{U}{f_o^2} + V^2 \left(\frac{1}{a^2 f_o^2} + \frac{\sin^2 2\alpha}{f_o^2} \right) - \frac{2}{a f_o^2} U V \cos 2\alpha + \frac{2b}{a^2 f_o f_c} V - \frac{2b}{a f_o f_c} U \cos 2\alpha + \frac{b^2}{a^2 f_c^2} - \sin^2 2\alpha = 0.$$

Les directions asymptotiques de la courbe sont imaginaires, donc l'image d'une fente-source sera une portion d'ellipse. D'après l'équation de l'ellipse nous remarquons que l'ellipse admet pour axes des axes différents des axes U et V . L'équation réduite de l'ellipse nous permet de déterminer l'orientation des axes de l'ellipse ainsi que leurs longueurs. Les longueurs des demi-axes de l'ellipse sont égales à

$$a'^2 = f_o^2 \left[1 - \frac{b^2}{f_c^2 (1 + a^2)} \right], \quad b'^2 = f_o^2 \sin^2 2\alpha \left[\frac{1}{1 + (1/a^2)} - \frac{b^2}{a^2 f_c^2 [1 + (1/a^2)]^2} \right].$$

Un autre point intéressant à préciser est la position du centre de l'ellipse :

$$C \left[U = \frac{f_o}{f_c} \frac{a b \cos 2\alpha}{1 + a^2}, \quad V = -\frac{b f_o}{f_c (1 + a^2)} \right].$$

Nous pouvons de même déterminer la direction des axes de l'ellipse. Ceci se fait à partir de l'équation de l'ellipse et en cherchant les racines de l'équation

$$-\frac{1}{a f_o^2} m^2 \cos 2\alpha + \left[\frac{1}{f_o^2} - \frac{1}{a^2 f_o^2} - \frac{1}{f_o^2} \sin^2 2\alpha \right] m + \frac{1}{a^2 f_o^2} \cos 2\alpha = 0,$$

d'où les directions des deux axes : $m_1 = -1/a \cos 2\alpha$, $m_2 = a \cos 2\alpha$. La direction des deux axes dépend donc essentiellement de l'angle α du coin.

Nous allons considérer quelques cas particuliers : droite perpendiculaire à l'arête du coin ; droite parallèle à l'arête du coin ; droite passant par l'origine des coordonnées (mais d'orientation quelconque) ; droite à 45° mais d'excentrement quelconque.

A) CAS D'UNE DROITE PERPENDICULAIRE A L'ARÊTE DU COIN. — Une droite

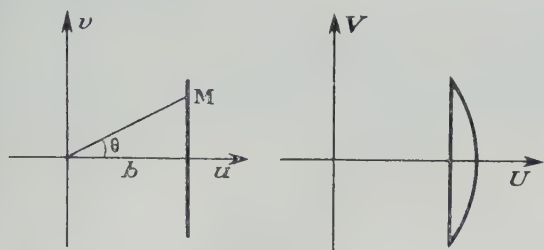


FIG. III.5.

perpendiculaire à l'arête du coin aura pour équation $v = b$. En reprenant les équations donnant les coordonnées des deux images d'une source ponctuelle, on trouve que les deux droites images sont confondues dans ce cas. Les deux images sont deux fentes perpendiculaires à l'arête du coin mais décalées latéralement et de longueurs différentes. La première image a pour longueur $2 (f_o/f_c) a$, si $2 a$ est la longueur de la fente-source. La deuxième image a pour longueur $2 a (f_o/f_c) \cos 2 \alpha$. Sur la figure III.4 nous pouvons montrer le décalage des deux fentes

$$AA' = (f_o/f_c) (\sqrt{a^2 + b^2} \sin 2 \alpha - a \cos 2 \alpha).$$

B) CAS D'UNE DROITE PARALLÈLE À L'ARÊTE DU COIN. — Une droite parallèle à l'arête du coin aura pour équation $u = b$. L'image directe sera une droite, parallèle à l'arête du coin, d'équation $U = -(f_o/f_c) b$. La deuxième image sera une ellipse centrée au point de coordonnées $-(f_o/f_c) b \cos 2 \alpha, 0$ et dont les directions des axes sont les axes de coordonnées. Son équation est

$$\left(\frac{U}{f_o} - \frac{b}{f_c} \cos 2 \alpha \right)^2 + \frac{V^2}{f_o^2} \sin^2 2 \alpha + \left(\frac{b^2}{f_c^2} - 1 \right) \sin^2 2 \alpha = 0.$$

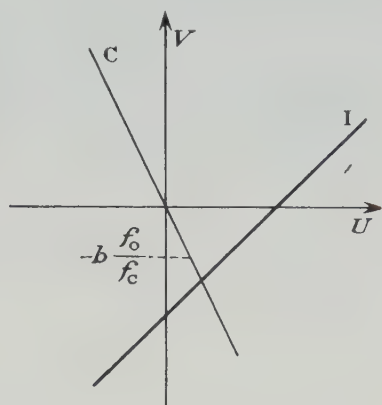
Dans le cas où la fente a une longueur finie, la deuxième image sera une portion d'ellipse limitée aux extrémités de la première image. Ceci est représenté sur la figure III.5.

C) CAS D'UNE FENTE PASSANT PAR L'ORIGINE DES COORDONNÉES. — Nous pouvons appliquer la théorie précédente, mais dans le cas où $b = 0$. Nous avons vu que la première image de la fente est une droite et que la deuxième image est une ellipse. Dans le cas particulier où $b = 0$ l'équation générale de l'ellipse devient

$$\frac{U^2}{f_o^2} + \frac{V^2}{f_o^2} \left(\frac{1}{a^2} + \sin^2 2 \alpha \right) - \frac{2}{a f_o^2} U V \cos 2 \alpha - \sin^2 2 \alpha = 0.$$

Par conséquent on aura une ellipse centrée sur l'origine des coordonnées et dont les pentes des axes sont $-1/a \cos 2 \alpha$ et $a \cos 2 \alpha$.

Supposons maintenant que $a = 1$ et étudions le cas général d'une fente quelconque. L'image directe est parallèle à la fente-source. Les coordonnées du centre de l'ellipse sont :

FIG. III.6. — I, image directe ;
C, lieu du centre de l'ellipse.

$$U = \frac{f_o}{f_c} \frac{b \cos 2 \alpha}{2}, \quad V = -\frac{b}{2} \frac{f_o}{f_c};$$

donc quel que soit b le lieu du centre est la droite d'équation $V = -U/\cos 2 \alpha$ et les axes ont pour pentes $-1/\cos 2 \alpha$ et $\cos 2 \alpha$, d'où la représentation de la figure III.6.

L'étude que nous avons faite nous permet de connaître pratiquement les formes des images de sources de formes diverses : circulaire ou ouverture rectangulaire. Cette étude est applicable quelle que soit la grandeur de l'angle α . Dans le cas où l'angle α est faible et permettant de négliger les termes d'ordre α^2 les expressions se simplifient ; par exemple pour une ouverture circulaire l'ellipse pourra être assimilée à un cercle : les deux images sont deux cercles de même rayon et décalés de la quantité $2 f_o \cos u$.

(A suivre.)

Manuscrit reçu le 15 mai 1963.

CONSIDÉRATIONS SUR L'OBSERVATION DES FRANGES D'INTERFÉRENCES EN MICROSCOPIE *

(suite)

par M^{lle} Monique GUILLARD

IV. Comparaison des sources étendues centrées et non centrées

Dans la majorité des cas, les mesures interférométriques sont faites à l'aide d'interféromètres du type Fizeau ou Michelson. Dans tous les cas la source est placée dans le plan focal d'une lentille collimatrice. L'étendue de la source étant finie, la lumière émise du collimateur ne forme pas un faisceau rigoureusement parallèle. D'autre part, il arrive que la source soit excentrée dans le plan focal du condenseur. On a en même temps un effet dû à l'étendue de la source et un effet dû à l'excentrement. Il faudra étudier l'influence de ces deux effets.

En incidence normale nous avons démontré que l'interfrange était égal à $\lambda/2$ (nous appellerons interfrange l'épaisseur comprise entre deux franges). Pour une source ponctuelle excentrée, l'interfrange est $\Delta = 2e \cos \theta = N\lambda$, où N est l'ordre d'interférence, λ la longueur d'onde utilisée et θ l'angle des rayons.

On a

$$\Delta(\theta) = \Delta(0) [1 - (\theta^2/2)].$$

Appelons d l'épaisseur qui correspond à une frange : $d(0)$ pour l'incidence normale, $d(\theta)$ pour l'incidence oblique d'où $d(\theta) = d(0) [1 + (\theta^2/2)]$, d'où le facteur de correction $m = d(0)/d(\theta)$. L'erreur relative est égale à $\theta^2/2$.

La correction à appliquer est égale à $\theta^2/2$ par unité de longueur [5]. Mais ceci n'est plus valable quand on prend une source étendue. On fait une erreur, car, au lieu de mesurer la distance vraie, on mesure l'interfrange entre les centres de gravité de franges dont le contraste est diminué ; ce système de franges est obtenu par superposition de systèmes obliques dont l'incidence varie entre deux

* Voir le début de ce mémoire dans le numéro de septembre 1963, pages 463 à 482.

valeurs. Lorsqu'on observe un phénomène d'interférences on effectue la mesure sur ces franges intégrées et on veut en déduire l'interfrange théorique qui serait obtenu avec une source cohérente centrée. La seule méthode correcte consiste à intégrer l'intensité.

Certains auteurs ont proposé un calcul simplifié dans lequel la quantité variable en fonction de θ est l'interfrange. Soit une source circulaire centrée sur l'axe et de rayon angulaire égal à i ; l'interfrange sera $\int_0^i (\lambda/2 \cos \theta) \sin \theta d\theta$, soit en

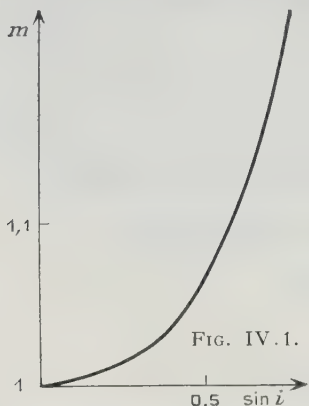


FIG. IV.1.

normalisant

$$\frac{\int_0^i (\lambda/2 \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^i \sin \theta d\theta} = \frac{\lambda \operatorname{Log} \cos i}{2 \cos i - 1} = m,$$

d'où la courbe (fig. IV.1) donnant m en fonction de i . Supposons que l'angle i soit faible nous obtenons

$$\frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{i^2}{4} + \frac{5i^2}{72} + \dots \right).$$

En application de ce résultat il suffit d'apporter une correction égale à $i^2/4$ par unité de longueur. La correction de $i^2/4$ est due à l'étendue de la source alors que la correction de $i^2/2$ était due à une source ponctuelle excentrée. Ce résultat risque de ne pas être exact car les différents systèmes de franges ont des pas différents et se déplacent.

Les calculs précédents ne tiennent pas compte de la répartition d'intensité dans les franges.

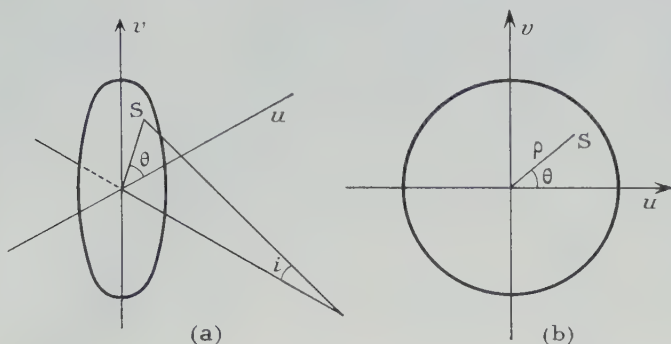
1. Cas des interférences à teinte plate. — Nous tiendrons compte de la répartition d'intensité dans les franges. Nous nous proposons d'étudier l'influence de l'étendue de la source et de déterminer l'erreur de phase provoquée par le déplacement des maxima et des minima. Dans le phénomène d'interférences à deux ondes la variation d'intensité est donnée par $I = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos \varphi$ si φ est la différence de phase; $\varphi = K L = 4 \pi d/\lambda$. Nous supposons en premier lieu que $a_1 = a_2$, c'est-à-dire que les facteurs de réflexion sont égaux, d'où $I = 4 a^2 \cos^2 (\varphi/2)$.

L'influence d'une source étendue sera étudiée dans différents cas particuliers : source circulaire centrée sur l'axe, source circulaire excentrée, source en fente.

1. Cas d'une source circulaire centrée. [6 à 9]. — Considérons une source centrée (fig. IV.2b); pour une source ponctuelle oblique l'incidence est i et la différence de phase devient $\varphi \cos i$, d'où l'intensité pour une source élémentaire $I(i) = 4 a^2 \cos^2 (\frac{1}{2} \varphi \cos i)$.

A) En premier lieu, nous allons traiter le cas où l'angle i est faible et en négligeant les termes d'ordre supérieur à i^2 (approximation valable jusque vers 35°); ceci donne une ouverture numérique du faisceau d'éclairage égale à 0.6. Pour une ouverture d'objectif égale à 0.85 le rapport $p = \sin u_c / \sin u_o$ est égal à 0.7. Cette

FIG. IV. 2.



ouverture permet d'atteindre de grandes luminosités.

L'intensité pour toute la source sera

$$I = 8 \pi a^2 \frac{1}{S} \int_0^i \cos^2 \left[\frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \right] i \, di \, d\theta,$$

d'où en intégrant,

$$I = \frac{1}{S} 2 \pi a^2 \left[i^2 + \frac{4}{\varphi} \cos \varphi \left(1 - \frac{i^2}{4} \right) \sin \left(\varphi \frac{i^2}{4} \right) \right].$$

L'expression de l'intensité pourra s'écrire

$$\begin{aligned} (2) \quad I &= 2 a^2 i^2 \left[1 + \frac{\sin(\varphi i^2/4)}{\varphi i^2/4} \cos \varphi \left(1 - \frac{i^2}{4} \right) \right] \\ &= 2 a^2 i^2 \left[1 + \frac{\sin(\varphi' i^2)}{\varphi' i^2} \cos \frac{4 \pi d}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{4} \right) \right]; \end{aligned}$$

a et i sont des constantes caractérisant l'interféromètre et l'ouverture de la source : $\varphi' i^2 = \pi d i^2 / \lambda = \varphi i^2 / 4$. D'autre part, $\varphi' i^2$ est la différence des phases de l'interféromètre entre un point de la source placé au centre et un point de la source placé au bord de l'ouverture. L'expression (2) montre que les franges sont symétriques.

La position des franges est donnée par les valeurs de φ qui annulent $\partial I / \partial \varphi$, soit pour les valeurs de φ qui satisfont l'équation

$$\frac{i^2}{4} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \frac{i^2}{4} \sin \varphi \left(1 - \frac{i^2}{4} \right) - \sin \varphi \frac{i^2}{4} \cos \varphi \left(1 - \frac{i^2}{4} \right) = 0.$$

Dans le cas où $\varphi' i^2$ est petit, $\sin(\varphi' i^2) / \varphi' i^2 \simeq 1$,

$$(3) \quad I = C' \cos^2 \left(\frac{2 \pi d}{\lambda} - \frac{\varphi' i^2}{2} \right).$$

L'expression (3) montre que les franges sont déplacées de leur position pour un point-source situé sur l'axe, soit un déphasage $\varphi' i^2$. Il en sera de même au voisinage de $\varphi' i^2 = (2n + 1) \pi / 2$.

Pour $0 < \varphi' i^2 < \pi$, le facteur $\sin(\varphi' i^2) / \varphi' i^2$ est positif et le déphasage Φ est égal à $\varphi' i^2$.

Pour $\varphi' i^2 = n \pi$ ($n = 1, 2, 3$), l'intensité est la même pour toutes les valeurs du facteur $\cos[(4 \pi d / \lambda) - \varphi' i^2]$ et ceci entraîne une disparition des franges.

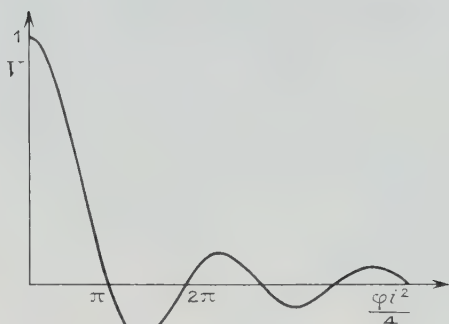


FIG. IV.3.

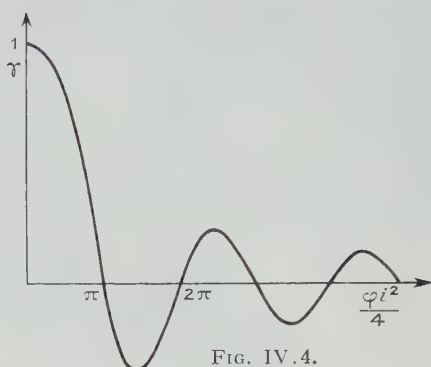


FIG. IV.4.

Pour $\pi < \varphi' i^2 < 2\pi$, nous poserons $\varphi' i^2 = \pi + \delta$; l'expression de l'intensité devient

$$I = 1 + \frac{\sin(\pi + \delta)}{\pi + \delta} \cos\left(\frac{4\pi d}{\lambda} - \pi - \delta\right) = 1 + \frac{\sin \delta}{\pi + \delta} \cos\left(\frac{4\pi d}{\lambda} - \delta\right),$$

d'où nous en déduisons la valeur du déplacement des franges : le déphasage est égal à δ soit $\varphi' i^2 - \pi$.

En règle générale si $n\pi < \varphi' i^2 < (n+1)\pi$, le déphasage sera égal à $\varphi' i^2 - n\pi$. Le déphasage maximum ne dépassera pas π , d'où la courbe donnant le déplacement des franges en fonction de $\varphi' i^2 = \pi d i^2 / \lambda$.

La position des franges (maximum et minimum) sera donnée au voisinage des extrema de $\sin(\varphi' i^2) / \varphi' i^2$ et pour $\varphi \rightarrow \infty$ par

$$(4) \quad \cos\left(\frac{4\pi d}{\lambda} - \varphi' i^2\right) = \cos\left(\frac{4\pi d}{\lambda} - \frac{\pi d i^2}{\lambda}\right) = \pm 1.$$

De l'expression (4) nous déduisons l'interfrange $\Delta d = \frac{1}{2}\lambda [1 + (i^2/4)]$, expression que nous avons trouvée précédemment. Si $\varphi/2$ est la demi-différence de phase, nous pourrions écrire $\varphi/2 = \frac{1}{4}(\varphi/2)i^2 + \frac{1}{2}n\pi$, qui est la condition pour obtenir les franges. En incidence normale et pour une source ponctuelle la condition était $\varphi/2 = \frac{1}{2}n\pi$. Le facteur de correction $1 + (i^2/4)$ n'est pas négligeable.

Comme nous l'avons vu, pour $\varphi' i^2 = n\pi$ il y a disparition des franges. Par conséquent il sera intéressant d'étudier la visibilité (le contraste) des franges. La visibilité a été définie par le rapport $V = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$,

$$I_{\max} = 1 + \frac{\sin(\varphi' i^2)}{\varphi' i^2}, \quad I_{\min} = 1 - \frac{\sin(\varphi' i^2)}{\varphi' i^2},$$

d'où la valeur de la visibilité $V = \sin(\varphi' i^2) / \varphi' i^2$; les valeurs maxima de V sont obtenues pour $dV/d(\varphi' i^2) = 0$ ce qui entraîne $\varphi' i^2 = \text{tg}(\varphi' i^2)$ pour le maximum de visibilité. La figure IV.3 montre la variation de la visibilité en fonction de $\varphi' i^2$: les franges restent visibles pour des valeurs $\varphi' i^2/4$ allant jusque vers 5π . Sur la courbe nous avons tracé la fonction $V = \sin(\varphi' i^2) / \varphi' i^2$.

Nous pouvons de même étudier la variation du contraste en fonction de $\varphi' i^2$. Le contraste est défini par

$$\gamma = (I_{\max} - I_{\min}) / I_{\max},$$

d'où

$$\gamma = \frac{2 \sin(\varphi' i^2)}{\varphi' i^2 + \sin(\varphi' i^2)}.$$

Le contraste s'annule pour les valeurs $\varphi' i^2 = n \pi$ et passe par des maxima (fig. IV.4). Nous avons jusqu'ici étudié la variation du déplacement des franges en fonction du facteur $\varphi' i^2$. Il serait intéressant de connaître la variation du déphasage en fonction de l'épaisseur de la lame et pour différentes valeurs de l'ouverture. Sur la figure IV.5 nous avons

tracé la variation du déphasage des franges pour une ouverture $i = 10^{-3}$ et pour $i = 8 \times 10^{-4}$. Nous remarquons que lorsque l'ouverture diminue, le maximum du déplacement des franges est atteint pour une valeur plus grande de l'épaisseur.

Pour $0 < \varphi' i^2 < \pi$ le déplacement est une fonction linéaire de $\varphi' i^2 = \pi d i^2 / \lambda$, donc fonction linéaire de l'épaisseur à ouverture constante et fonction parabolique de l'ouverture.

B) CAS OÙ L'ANGLE i N'EST PLUS FAIBLE. — Après avoir traité le cas de source de faible diamètre apparent nous allons essayer de traiter le cas général ; en premier lieu nous allons considérer un *instrument aplanétique* et allons comparer les résultats à celui d'un instrument fictif obéissant à la relation des tangentes.

Intégrons $I(i) = 4 \cos^2 (\frac{1}{2} \varphi \cos i)$ à l'intérieur d'une source circulaire de rayon i ,

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^r \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \cos i \right) \rho \, d\rho \, d\theta,$$

soit dans le cas d'un *instrument aplanétique*

$$I = \int_0^i \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \cos i \right) \sin i \cos i \, di.$$

Les positions des franges (maxima et minima) par rapport à celles observées à l'aide d'une source ponctuelle centrée sont déterminées pour des valeurs de φ pour lesquelles $\partial I / \partial \varphi = 0$

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = -c' \int_0^i \sin(\varphi \cos i) \sin i \cos^2 i \, di.$$

Nous allons calculer l'intégrale donnant $\partial I / \partial \varphi$. On peut intégrer en faisant le changement de variable $v = \varphi \cos i$,

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = -\frac{c'}{8 \varphi^3} \int_{\varphi}^{\varphi \cos i} v^2 \sin v \, dv,$$

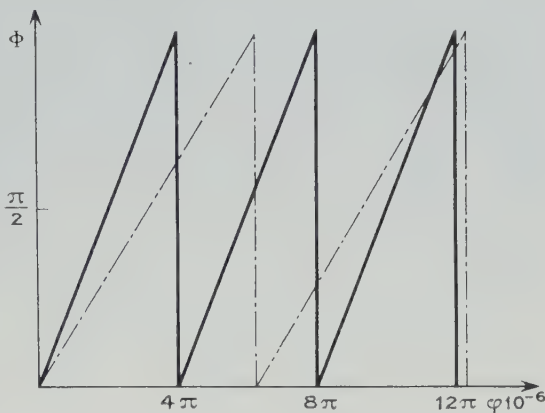
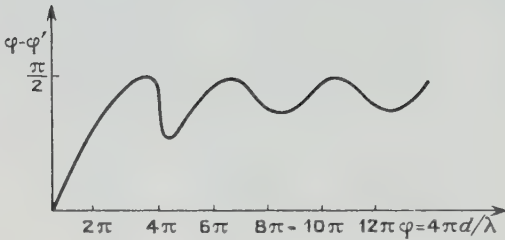
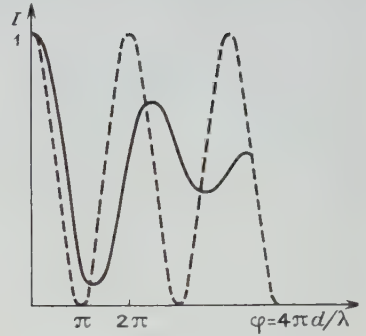


FIG. IV.5. — En trait plein, $i = 10^{-3}$;
en trait mixte, $i = 8 \times 10^{-4}$.

FIG. IV. 6. $\sin i = 0,866$.FIG. IV. 7. — En tirets, source ponctuelle ;
en trait plein, $\sin i = 0,866$.

d'où la valeur de $\partial I / \partial \varphi$:

$$(5) \quad \frac{\partial I}{\partial \varphi} \propto 2 \varphi \cos i \sin (\varphi \cos i) - 2 \varphi \sin \varphi - \\ - (\varphi^2 \cos^2 i - 2) \cos (\varphi \cos i) + (\varphi^2 - 2) \cos \varphi .$$

Pour avoir la position des maxima et des minima, il suffit d'annuler l'expression (5).

Si i est de l'ordre de 10^{-3} , $\varphi \simeq 10^6$, on pourra écrire

$$\cos (\varphi \cos i) \sim \cos \varphi, \quad \sin (\varphi \cos i) = \sin \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{4} \varphi i^2 + n \pi .$$

Cette expression est celle que nous avons trouvée dans le cas précédent. Nous allons calculer le déplacement des franges dans un cas particulier et tracer la courbe donnant le déphasage des franges en fonction de $\varphi = 4 \pi d / \lambda$.

Exemple de calcul numérique : le cas étudié est celui où $\sin i = 0,866$ (ouverture correspondant aux objectifs à sec les plus forts). Nous pouvons calculer par approximations successives les zéros de l'expression

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} \propto \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \varphi \sin \varphi - \left(\frac{\varphi^2}{8} - 1 \right) \cos \frac{\varphi}{2} + \left(\frac{\varphi^2}{2} - 1 \right) \cos \varphi .$$

En incidence normale pour une source ponctuelle les zéros ont lieu pour $\varphi' = n \pi$ (tableau II).

Nous pouvons montrer sur un graphique la variation du déphasage en fonction de $\varphi = 4 \pi d / \lambda$. La courbe de la figure IV.6 présente des oscillations et nous pouvons constater que le déplacement n'excède jamais $1/2$ frange dans le cas d'une ouverture circulaire.

Nous venons d'étudier le déphasage des franges dû à l'ouverture de la source ; dans le cas d'une source ponctuelle la répartition d'intensité est liée à la demi-différence de phase par la relation $I = K \cos^2 (\varphi/2)$. La loi en $\cos^2$ donne pour l'intensité des maxima et minima pour $\varphi = n \pi$. La variation de l'intensité est représentée sur la figure IV.7 par la courbe en tirets.

Calculons la répartition d'intensité

TABLEAU II

φ'	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π	10π	12π
φ	$\pi + 44^\circ$	$2\pi + 80^\circ$	$3\pi + 93^\circ$	$4\pi + 74^\circ$	$5\pi + 72^\circ$	$6\pi + 92^\circ$	$7\pi + 96^\circ$	$8\pi + 76^\circ$	$10\pi + 94^\circ$	$12\pi + 78^\circ$
$\varphi - \varphi'$	44°	80°	93°	74°	72°	92°	96°	76°	94°	78°

$$I = 2\pi \int_0^i \cos^2\left(\frac{\varphi}{2} \cos i\right) \sin i \cos i \, di$$

$$= \pi \int_0^i 1 + \cos(\varphi \cos i) \sin i \cos i \, di = 1 + \frac{1}{S} \int_0^i \cos(\varphi \cos i) \sin i \cos i \, di,$$

d'où en intégrant, en posant comme précédemment $v = \varphi \cos i$,

$$I = \frac{\pi}{2} \sin^2 i \left\{ 1 - \frac{2}{\varphi^2 \sin^2 i} [\cos(\varphi \cos i) + \varphi \cos i \sin(\varphi \cos i) - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi] \right\}.$$

Nous allons tracer la courbe donnant la répartition de l'intensité dans le cas de l'application précédente, c'est-à-dire pour $\sin i = 0,866$. La loi donnant la répartition de l'intensité s'écrit alors

$$I = I_0 \left[1 - \frac{8}{3\varphi^2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right) \right],$$

d'où la courbe en trait plein de la figure IV.7 donnant la variation de l'intensité en fonction de φ . Pour avoir la valeur de l'intensité pour $\varphi = 0$ nous devons faire un développement en série et nous trouvons $I = I_0$ (tableau III).

TABLEAU III

φ	0	$\pi + 44^\circ$	$2\pi + 80^\circ$	$3\pi + 96^\circ$	$4\pi + 74^\circ$
I/I_0	1	0,075	0,75	0,413	0,56

La loi des franges observées paraît compliquée : le contraste, la période et le déphasage Φ varient en fonction de φ . L'ordre d'interférence des franges diminue pour une épaisseur donnée.

Les calculs ont été faits dans le cas d'un instrument aplanétique. Nous allons comparer les résultats à ceux obtenus dans le cas où la correspondance serait en tangente, c'est-à-dire si $h = f \operatorname{tg} i$, au lieu de $h = f \sin i$, d'où

$$x = f \operatorname{tg} i \cos \theta, \quad y = f \operatorname{tg} i \sin \theta.$$

L'expression de l'intensité dans ce cas est donnée par l'intégrale

$$I = 2\pi \int_0^i \cos^2\left(\frac{\varphi}{2} \cos i\right) \frac{\sin i}{\cos^3 i} \, di.$$

La position des franges sera donnée, nous l'avons vu, pour $\partial I/\partial \varphi = 0$, soit pour

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = -2\pi \int_0^i \sin(\varphi \cos i) \frac{\sin i}{\cos^2 i} di.$$

Pour intégrer cette expression, il nous suffit de poser $v = \varphi \cos i$, d'où

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} \propto \int_{\varphi}^{\varphi \cos i} \frac{\sin v}{v^2} dv;$$

or l'intégrale $\int \frac{\sin v}{v^2} dv$ est une intégrale connue; nous en déduisons donc la position des franges

$$(6) \quad \frac{\partial I}{\partial \varphi} \propto \frac{\sin \varphi}{\varphi} - \frac{\sin(\varphi \cos i)}{\varphi \cos i} - \text{Ci}(\varphi) + \text{Ci}(\varphi \cos i),$$

où

$$\text{Ci}(x) = \int \frac{\cos x}{x} dx = \text{Log}|x| - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^4}{4.4!} - \dots$$

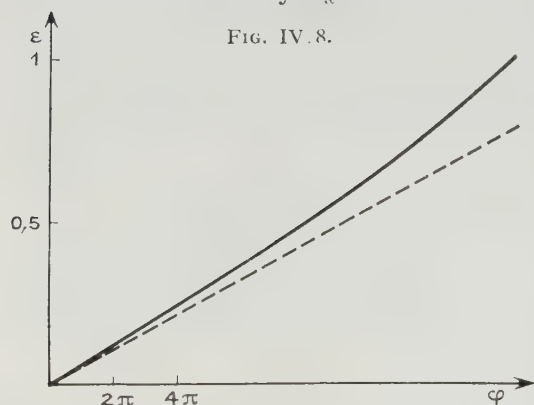


FIG. IV.8.

Nous trouvons cette formule dans le travail de C. Bruce [8].

Il faut donc chercher les valeurs de φ qui annulent $\partial I/\partial \varphi$ (6). Ces valeurs sont trouvées, comme dans le cas précédent, par approximations successives.

L'expression (6) est différente de l'expression (5). La position des franges ne sera pas la même dans les deux cas. La courbe représentant le déphasage des franges calculé à partir de l'expression

(6) est donnée par la figure IV.8 pour une ouverture égale à 0,6. L'expression (6) est valable pour toutes les valeurs de φ et de i . En conséquence lorsque i est faible et si φ est de l'ordre de 10^6 , le cosinus intégral est voisin de 0 et on obtient $\sin \varphi = \sin(\varphi \cos i)$, $\varphi = \frac{1}{4} \varphi i^2 + n\pi$.

A la limite quand i est faible, que l'instrument soit aplanétique ou non, nous trouvons la même valeur de la correction égale à $i^2/4$ par unité; ce résultat était prévisible du fait que, i étant faible, on assimile $\sin i$ et $\text{tg } i$ à i .

Sur la figure IV.8 nous pouvons comparer le déplacement obtenu à l'aide de l'expression (6) et celui que donne la loi $i^2/4$ par unité.

2. Cas d'une source circulaire excentrée.

— Considérons une source circulaire excentrée (fig. IV.9) suivant l'axe

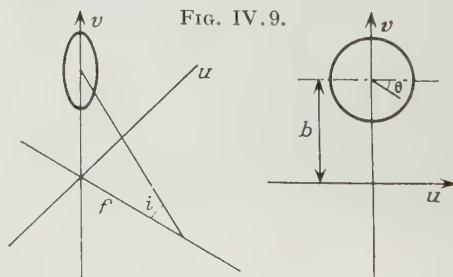


FIG. IV.9.

des v . L'intensité pour une source ponctuelle excentrée étant donnée par $I = 4 a^2 \cos^2 (\frac{1}{2} \varphi \cos i)$, où φ est la différence de phase, pour toute l'étendue de la source l'expression de l'intensité en coordonnées polaires s'exprime par

$$I = \frac{1}{S} 4 \int_0^{2\pi} \int_0^R \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \cos i \right) \rho \, d\rho \, d\theta .$$

Nous supposons que l'angle i n'est pas trop grand et que l'on peut assimiler $\cos i$ à $1 - (i^2/2)$. On peut vérifier que cette approximation est suffisante jusque vers 35° .

$$I = \frac{1}{S} 4 \int_0^{2\pi} \int_0^R \cos^2 \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{\varphi i^2}{2} \right) \rho \, d\rho \, d\theta ,$$

avec $i^2 = \rho^2 + b^2 - 2 \rho b \sin \theta$, si b est l'excentrement de la source soit la distance entre le centre de la source et le centre du système optique. Avec $\rho/f = \sin i_1$, $b/f = \sin i_2$ la condition de construction s'écrit $\sin(i_1 + i_2) \leq 1$. On prendra comme approximation $\cos(i_1 + i_2) \simeq 1 - \frac{1}{2}(i_1 + i_2)^2$,

$$I = \frac{1}{S} \left[2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, d\rho \, d\theta + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \cos \left(\varphi - \frac{\varphi \rho^2 + \varphi b^2}{2} + \varphi \rho b \sin \theta \right) \rho \, d\rho \, d\theta \right] ,$$

d'où

$$I = 2 + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \cos \left(\varphi - \frac{\varphi b^2 + \varphi \rho^2}{2} + \varphi \rho b \sin \theta \right) \rho \, d\rho \, d\theta ,$$

soit en développant et en utilisant la définition

$$\mathbf{J}_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) \, d\theta ,$$

$$I = 2 + \frac{1}{S} 4 \pi \int_0^R \cos \left(\varphi - \varphi \frac{\rho^2 + b^2}{2} \right) \mathbf{J}_0(\varphi \rho b) \rho \, d\rho .$$

L'intégrale peut se calculer en faisant intervenir les intégrales de Lommel (le calcul sera fait plus loin dans le cas d'un coin), mais nous avons envisagé le cas des angles faibles et, dans ce chapitre, nous nous limiterons au cas où ρb est faible soit $\sin i_1 \sin i_2 = \frac{1}{2} [\cos(i_1 - i_2) - \cos(i_1 + i_2)]$; or i_1 et i_2 sont voisins, donc dans le domaine de l'approximation précédente. Si ρb est faible la fonction $\mathbf{J}_0(\varphi \rho b)$ est très voisine de 1 et l'intensité se ramène à l'expression

$$I = 2 + \frac{1}{S} 4 \pi \int_0^R \cos \left(\varphi - \varphi \frac{\rho^2 + b^2}{2} \right) \rho \, d\rho ,$$

soit en intégrant, en posant $u = \rho^2$,

$$I = 2 + \frac{4}{\varphi} \left[\sin \left(\varphi - \varphi \frac{R^2 + b^2}{2} \right) - \sin \left(\varphi - \varphi \frac{b^2}{2} \right) \right] ,$$

d'où l'expression de l'intensité

(7)

$$I = 2 \left[1 + \cos \left(\varphi - \varphi \frac{2b^2 + R^2}{4} \right) \frac{\sin(\varphi R^2/4)}{\varphi R^2/4} \right] \\ = 2 \left[1 + \cos \left(\varphi - \varphi \frac{R^2}{4} - \varphi \frac{b^2}{2} \right) \frac{\sin(\varphi R^2/4)}{\varphi R^2/4} \right].$$

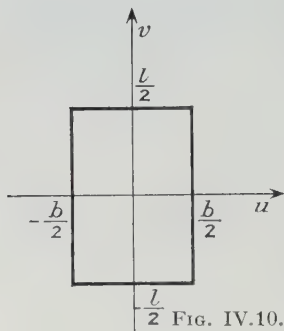


FIG. IV.10.

D'après l'expression (7) nous remarquons que les franges sont déphasées (à partir de leur position pour un point source situé au centre sur l'axe) de la quantité $\Phi'(b) = (\varphi R^2/4 f^2) + (\varphi b^2/2 f^2)$. Lorsque la source était placée au centre sur l'axe le déphasage était égal à $\Phi = \frac{1}{4} \varphi i^2 = \frac{1}{4} \varphi R^2/f^2$, d'où $\Phi' - \Phi = \varphi b^2/2 f^2$. On a un déphasage supplémentaire dû à l'excentrement b de la source. Le déphasage supplémentaire $\varphi b^2/2 f^2$ est le même que celui pour une source ponctuelle excentrée ; la visibilité reste la même que pour une source centrée.

3. *Cas d'une source rectangulaire* [10]. — Considérons une source rectangulaire centrée sur l'axe (fig. IV.10). La répartition d'intensité est donnée par

$$I = 4 \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-b/2}^{b/2} \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \cos i \right) du dv.$$

Dans le cas de la source rectangulaire l'expression de l'intensité devient

$$I = 2 \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-b/2}^{b/2} [1 + \cos(\varphi \cos i)] du dv.$$

Nous n'envisagerons que le cas où l'on peut écrire $\cos i \simeq 1 - (i^2/2)$. Passons aux coordonnées rectangulaires u, v avec $u^2 + v^2 = \sin^2 i$ en supposant $f = 1$, d'où l'expression de l'intensité

$$I = 2 \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 + \cos \varphi \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] du dv.$$

Nous retrouvons ici l'expression donnée par M. Françon [10]

$$I = 2 \iint du dv + 2 \cos \varphi \iint \cos \varphi \frac{u^2 + v^2}{2} du dv + \\ + 2 \sin \varphi \iint \sin \varphi \frac{u^2 + v^2}{2} du dv.$$

On pourra intégrer en posant $u' = \sqrt{\varphi/\pi} u, v' = \sqrt{\varphi/\pi} v$,

$$S(u') = \int_0^{u'} \sin \left(\frac{1}{2} \pi u'^2 \right) du', \quad C(u') = \int_0^{u'} \cos \left(\frac{1}{2} \pi u'^2 \right) du',$$

d'où

$$I = lb + \frac{2\pi}{\varphi} \sqrt{C_1^2 + S_1^2} \cos \left[\frac{4\pi d}{\lambda} - \arctg \frac{S(u') C(v') + S(v') C(u')}{C(u') C(v') - S(u') S(v')} \right].$$

Les franges brillantes et sombres sont données par la relation

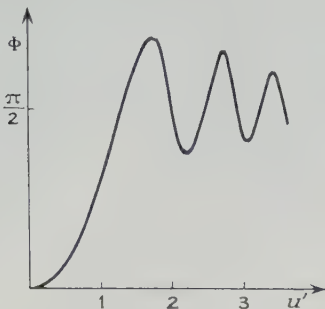


FIG. IV.11.

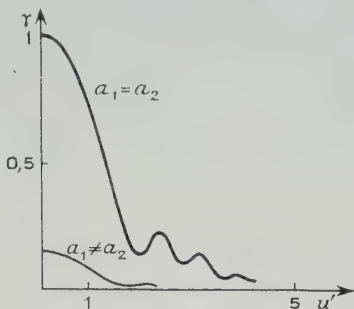


FIG. IV.12

$\cos [\varphi + \arctan (S_1/C_1)] = \pm 1$, soit pour
 $\operatorname{tg} \Phi = [\mathbf{S}(u') \mathbf{C}(v') + \mathbf{S}(v') \mathbf{C}(u')]/[\mathbf{C}(u') \mathbf{C}(v') - \mathbf{S}(u') \mathbf{S}(v')] = S_1/C_1$.
Le déplacement des franges est Φ .

La courbe (fig. IV.11) donnant le déphasage des franges en fonction de $u' = \sqrt{\varphi/\pi} u$ sera tracée dans le cas particulier d'une ouverture carrée. Nous pouvons de même tracer la courbe (fig. IV.12) donnant le contraste des franges en fonction de $\sqrt{\varphi/\pi} u$ en prenant pour définition du contraste $\gamma = (I_{\max} - I_{\min})/I_{\max}$; nous obtenons pour valeur du contraste $\gamma = 2 \sqrt{C_1^2 + S_1^2} / (l b + \sqrt{C_1^2 + S_1^2})$ et, pour avoir un bon contraste, il faudra donner à la source un diamètre apparent $[10] 2 i \sqrt{d/\lambda} < 1$, si $2 i$ est l'angle sous lequel on voit de l'objectif le côté de la source. Nous n'insistons pas car ces calculs ont été faits et on peut montrer que lorsque la source est excentrée (soit quand on observe les franges en incidence oblique) on constate que la tolérance est plus sévère. On aura donc intérêt à utiliser une source centrée car on pourra la prendre de plus grandes dimensions.

4. Cas où les deux amplitudes sont inégales. — Nous n'avons envisagé que le cas où les deux amplitudes a_1 et a_2 étaient égales. Dans la plupart des cas pratiques, aussi bien en lumière transmise qu'en lumière réfléchie (voir chap. V), les deux amplitudes a_1 et a_2 sont inégales.

Nous allons faire le calcul dans le cas d'une ouverture circulaire et pour un angle i faible. Nous avons vu au paragraphe IV.1 l'expression de l'intensité lorsque les deux amplitudes sont différentes $I = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos \varphi$ soit, pour une source ponctuelle correspondant à l'incidence i , $\delta I = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\varphi \cos i)$. Pour une source étendue l'intensité s'exprime par la relation

$$I = \frac{1}{S} \int_0^{2\pi} \int_0^i \left[a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos \varphi \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \right] i \, di \, d\theta$$

soit, en intégrant,

$$I = (a_1^2 + a_2^2) \left[1 + \frac{2 a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \frac{\sin(\varphi i^2/4)}{\varphi i^2/4} \cos \frac{4 \pi d}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{4} \right) \right].$$

Les franges sont données par $\cos [(4 \pi d/\lambda) - (\varphi i^2/4)] = \pm 1$. Le déphasage reste identique.

La visibilité est donnée par la fonction

$$V = 2 \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \frac{\sin(\varphi i^2/4)}{\varphi i^2/4}.$$

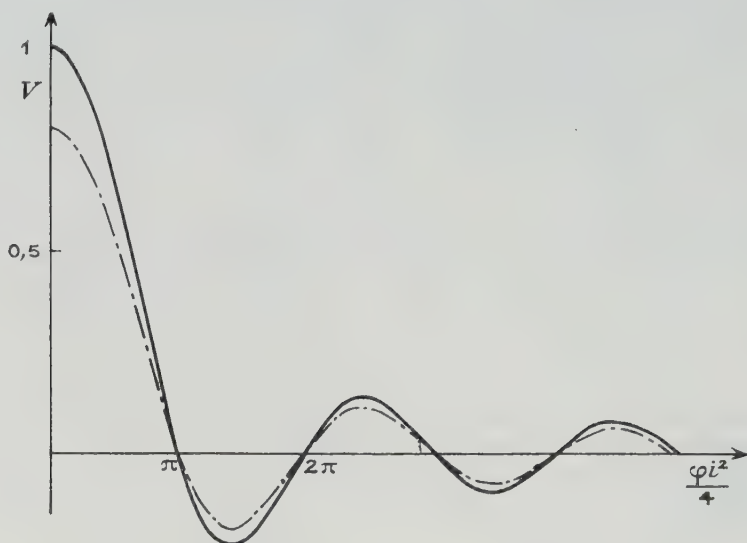


FIG. IV.13. — En trait plein, $a_1 = a_2$; en trait mixte, $a_1 = a_2/2$.

d'où la courbe (fig. IV.13) donnant la visibilité en fonction de $\varphi i^2/4$. Pour $\varphi i^2/4 = 0$ on constate que la visibilité n'est plus égale à 1 mais à $2 a_1 a_2 / (a_1^2 + a_2^2)$. On aura donc un phénomène moins lumineux. La position des franges est la même lorsque $a_1 \neq a_2$ et $a_1 = a_2$.

Le contraste s'exprime par la relation

$$\gamma = 4 \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \sin\left(\varphi \frac{i^2}{4}\right) \left/ \left[\varphi \frac{i^2}{4} + 2 \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \sin\left(\varphi \frac{i^2}{4}\right) \right] \right.$$

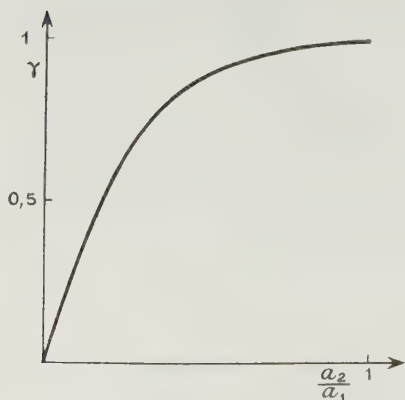


FIG. IV.14.

De même que pour la visibilité le contraste pour $\varphi i^2/4 = 0$ n'est plus égal à l'unité $\gamma = 4 a_1 a_2 / (a_1 + a_2)^2$. Nous pourrions donc tracer la courbe (fig. IV.14) donnant les variations de γ en fonction du rapport $x = a_2/a_1$.

Nous avons trouvé les mêmes résultats pour les valeurs de l'angle i quelconques, pour une source circulaire et pour une source rectangulaire. Les franges ont la même position; le contraste et la visibilité à l'origine sont inférieurs à 1.

(A suivre.)

Manuscrit reçu le 15 mai 1963.

Extrait de la *Revue d'Optique* n° 2
Février 1964, pages 64-88

CONSIDÉRATIONS SUR L'OBSERVATION DES FRANGES D'INTERFÉRENCES EN MICROSCOPIE *

(suite)

par M^{lle} Monique GUILLARD

2. **Etude d'un coin d'air.** — Nous nous proposons maintenant d'étudier l'effet d'obliquité et de l'étendue de la source sur les franges d'égale épaisseur dues à un coin d'air. Dans le cas précédent aucune diaphragmation n'intervenait et le problème se ramenait à une intégration à l'intérieur de la pupille du condenseur.

Dans le cas du coin d'air le problème se complique du fait que les « deux images pupillaires » constituées de couples de sources secondaires définies plus haut peuvent, suivant l'ouverture de l'objectif et l'angle α du coin, ne pas être admises en totalité dans l'instrument ; de ce fait on aura une perte de contraste supplémentaire et un déphasage différent du cas où α est nul ce qui est l'objet des paragraphes qui vont suivre.

Nous étudierons successivement les deux cas.

Nous avons calculé au chapitre III la différence de phase introduite par un coin d'air ; en reprenant les notations de ce chapitre nous avons

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} [-x \sin \alpha \cos \alpha_2 + l \cos \alpha_2 + z (\cos \alpha \cos \alpha_2 - \cos i)],$$

avec $\cos \alpha_2 = \cos i \cos \alpha + \sin i \sin \alpha \cos \theta$. En comptant l'épaisseur suivant l'axe optique nous avons $l = d \cos \alpha$ (fig. II.4), d'où

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} [-x \sin \alpha \cos \alpha_2 + d \cos \alpha \cos \alpha_2 + z (\cos \alpha \cos \alpha_2 - \cos i)].$$

On va se limiter au cas où α et i sont faibles, c'est-à-dire le cas où l'on peut assimiler $\cos i$ à $1 - (i^2/2)$ et où l'on peut négliger les termes d'ordre supérieur (jusque vers 35°). La différence de phase s'écrit alors

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \left[-\alpha x + d(1 - \alpha^2) - \frac{d i^2}{2} + d i \alpha \cos \theta + z(-\alpha^2 + i \alpha \cos \theta) \right],$$

soit, en se reportant aux coordonnées dans le plan de la source

$$u = \sin i \cos \theta \simeq i \cos \theta, \quad v = \sin i \sin \theta \simeq i \sin \theta,$$

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} [-\alpha x + d(1 - \alpha^2) - z \alpha^2] + \frac{4\pi}{\lambda} \left[-d \frac{i^2}{2} + (d + z) u \alpha \right] = \frac{4\pi}{\lambda} (L + D),$$

en posant

$$L = -\alpha x + d(1 - \alpha^2) - z \alpha^2, \quad D = -\frac{1}{2} d (u^2 + v^2) + (d + z) u \alpha.$$

* Voir le début de ce mémoire dans les numéros de septembre 1963, pages 463 à 482 et de janvier 1964, pages 21 à 32.

Remarquons que le plan de localisation correspond à une distance $z = -d$ et les franges les plus contrastées correspondront à ce cas

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}(-\alpha x + d) - \frac{4\pi}{\lambda}d \frac{i^2}{2}.$$

Les calculs seront faits dans le cas général avec défaut de mise au point (objectif ne visant pas le plan de localisation).

L'intensité s'exprime par $I = 2 \left[1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda}(L + D) \right]$ lorsque les deux amplitudes sont égales et pour une source ponctuelle. Pour une source étendue,

$$I = 2 \int_s \left[1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda}(L + D) \right] ds,$$

où la source s joue le rôle de domaine d'intégration :

$$I = 2s \left[1 + \frac{1}{s} \int \cos 2k(L + D) ds \right],$$

$$\int \cos 2k(L + D) ds = \cos 2kL \int \cos 2kD ds - \sin 2kL \int \sin 2kD ds$$

$$= C \cos 2kL - S \sin 2kL = V' \cos(2kL + \Phi),$$

avec $V' = \sqrt{C^2 + S^2}$ et $\text{tg } \Phi = S/C$. On retiendra donc les formules

$$\left. \begin{aligned} I &= 2s \left[1 + (V'/S) \cos(2kL + \Phi) \right] \\ V' &= \sqrt{C^2 + S^2}, \quad \text{tg } \Phi = S/C \end{aligned} \right\}.$$

La visibilité des franges est $V = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min}) = V'/S$. Le déphasage des franges est donné par Φ .

On a donc déterminé les formules pour une source de forme quelconque et un interféromètre de Fizeau d'épaisseur d , dans le cas de sources pas très grandes. On remarque que la quantité L n'intervient ni dans la visibilité ni dans l'expression du déphasage Φ .

Supposons que l'on prenne un coin d'angle α quelconque et que l'angle d'ouverture soit faible de telle sorte que l'on puisse assimiler $\cos i$ à $1 - (i^2/2)$. Pour un coin d'épaisseur nulle au centre,

$$dI = A \cos^2 [k \sin \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta) x], \quad \text{soit } I = \iint dI ds.$$

Pour une source circulaire centrée sur l'axe optique

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^i \cos^2 [k \sin \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta) x] ds.$$

Calculons dI en supposant i faible et α quelconque

$$dI = A \left\{ 1 + \cos \left\{ 2kx \sin \alpha \left[\left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \cos \alpha + i \sin \alpha \cos \theta \right] \right\} \right\}.$$

En posant $X' = 2kx \sin \alpha$,

$$dI = A \left\{ 1 + \cos \left[X' \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \cos \alpha + i X' \sin \alpha \cos \theta \right] \right\},$$

d'où l'intégrale à calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^i \left\{ 1 + \cos \left[X' \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \cos \alpha + i X' \sin \alpha \cos \theta \right] \right\} i \, di \, d\theta .$$

Or
$$\mathbf{J}_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \varphi) \, d\varphi ,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \left[X' \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \cos \alpha \right] \cos(i X' \sin \alpha \cos \theta) \, d\theta = \\ = 2\pi \cos \left[X' \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \cos \alpha \right] \mathbf{J}_0(i X' \sin \alpha) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} \int_0^i i \, di \, d\theta + 2\pi \int_0^i \cos(X' \cos \alpha) \cos \left(X' \frac{i^2}{2} \cos \alpha \right) \mathbf{J}_0(i X' \sin \alpha) i \, di + \\ + 2\pi \int_0^i \sin(X' \cos \alpha) \sin \left(X' \frac{i^2}{2} \cos \alpha \right) \mathbf{J}_0(i X' \sin \alpha) i \, di , \end{aligned}$$

soit en posant comme précédemment

$$C = 2\pi \int_0^i \cos \left(X' \frac{i^2}{2} \cos \alpha \right) \mathbf{J}_0(i X' \sin \alpha) i \, di ,$$

$$S = 2\pi \int_0^i \sin \left(X' \frac{i^2}{2} \cos \alpha \right) \mathbf{J}_0(i X' \sin \alpha) i \, di ,$$

$$I = \pi i^2 + 2\pi \sqrt{C^2 + S^2} \cos(X' \cos \alpha - \Phi) \quad , \quad \operatorname{tg} \Phi = S/C ,$$

d'où la visibilité s'exprime par $V = \sqrt{C^2 + S^2}$.

1. La source est une fente étroite. — A) FENTE SANS DIAPHRAGMATION. — Nous allons appliquer les formules trouvées précédemment. Nous supposons en premier lieu une fente étroite centrée, c'est-à-dire passant par l'origine. Nous avons vu au paragraphe IV.2 que $D = -\frac{1}{2} d i^2 + (d + z) u \alpha$.

Nous déterminerons d'abord les franges dans le *plan de localisation* (plan de localisation pour une petite source entourant le point central), donc $z = -d$.

Dans ce cas l'expression D s'écrit $D = -\frac{1}{2} d i^2$. Nous remarquons que l'angle du coin n'intervient pas et que les expressions de la visibilité et du déphasage sont les mêmes que pour une lame à faces parallèles. Nous devons calculer les intégrales

$$C = \int dy \int_{-h}^{+h} \cos(k d h^2) \, dh \quad , \quad S = \int dy \int_{-h}^{+h} \sin(k d h^2) \, dh .$$

Ces intégrales s'obtiennent aisément à partir des intégrales de Fresnel

$$\mathbf{C}(u) = \int_0^u \cos \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) du \quad , \quad \mathbf{S}(u) = \int_0^u \sin \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) du .$$

On en déduit le déphasage $\operatorname{tg} \Phi = \mathbf{S}(u)/\mathbf{C}(u)$, où $u = 2 \sqrt{d/\lambda} h$ et la visibilité

$$V = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \sqrt{[\mathbf{C}(u)]^2 + [\mathbf{S}(u)]^2} .$$

Les courbes donnant le déphasage et la visibilité sont celles pour une lame à faces parallèles d'épaisseur d (fig. IV.15 et 16).

Etudions maintenant le cas où la mise au point est faite sur un autre plan que le plan de localisation. Limitons-nous, par exemple, au cas de la mise au point faite sur la face supérieure du coin soit $z = 0$ (ou défaut de mise au point égal à d). Nous allons appliquer les formules précédentes soit $D = -\frac{1}{2} d i^2 + (d + z) u \alpha$, soit, puisque $z = 0$, $D = -\frac{1}{2} d i^2 + d i \alpha \cos \theta$.

Soit une fente de largeur dy et de surface $2 h dy$; dans ce cas $i = h$, d'où $D = -\frac{1}{2} d h^2 + h d \alpha \cos \theta$. Suivant l'azimut θ , le terme en h s'annule pour $\theta = \pi/2$ (fente parallèle à l'arête du coin). Nous devons calculer les intégrales C et S

$$(8) \quad C = \int_s \cos 2 k D ds = \int dy \int_{-h}^{+h} \cos \left\{ k d \left[(h - \alpha \cos \theta)^2 - \frac{\alpha^2}{2} \cos^2 \theta \right] \right\} dh.$$

Dans cette expression, α représente l'angle du coin et θ représente l'orientation de la fente-source ($\theta = 0$ pour le plan des u et x). Cette intégrale pourra être calculée en développant le cosinus et en posant $q = 2 \sqrt{d/\lambda} (h - \alpha \cos \theta)$. D'autre part dans cette intégrale interviennent les intégrales

$$C(u) = \int_0^u \cos \left(\frac{\pi}{2} q^2 \right) dq, \quad S(u) = \int_0^u \sin \left(\frac{\pi}{2} q^2 \right) dq,$$

d'où les expressions de C et S

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \left\{ \cos(k d \alpha^2 \cos^2 \theta) [C(u_1) + C(u_2)] + \sin(k d \alpha^2 \cos^2 \theta) [S(u_1) + S(u_2)] \right\},$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \left\{ \cos(k d \alpha^2 \cos^2 \theta) [S(u_1) + S(u_2)] - \sin(k d \alpha^2 \cos^2 \theta) [C(u_1) + C(u_2)] \right\},$$

avec $u_1 = 2 \sqrt{d/\lambda} (h - \alpha \cos \theta)$, $u_2 = 2 \sqrt{d/\lambda} (h + \alpha \cos \theta)$. Nous pouvons en déduire le déphasage suivant la relation $\text{tg } \Phi = S/C$. Dans le cas d'une fente étroite on aura

$$\text{tg } \Phi = \frac{\cos(k d \alpha^2 \cos^2 \theta) [S(u_1) + S(u_2)] - \sin(k d \alpha^2 \cos^2 \theta) [C(u_1) + C(u_2)]}{\cos(k d \alpha^2 \cos^2 \theta) [C(u_1) + C(u_2)] + \sin(k d \alpha^2 \cos^2 \theta) [S(u_1) + S(u_2)]};$$

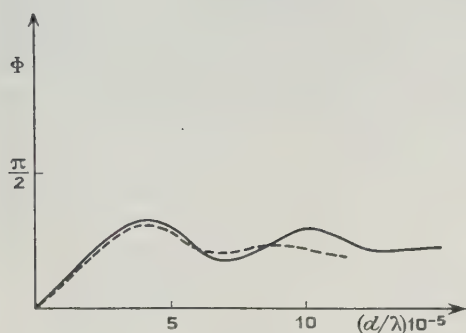


FIG. IV.15. $i = 12,5 \times 10^{-4}$.

En trait plein, $\theta = \pi/2$; en tirets, $\theta = 0$.

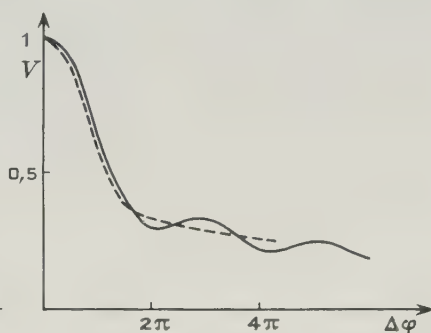


FIG. IV.16. $\alpha = 10^{-4}$.

En trait plein, $\theta = \pi/2$; en tirets, $\theta = \pi$.

Φ pourra être considéré comme égal à $\Phi_1 - \Phi_2$ avec

$$\text{tg } \Phi_1 = \text{tg}(k d \alpha^2 \cos^2 \theta), \quad \text{tg } \Phi_2 = [S(u_1) + S(u_2)]/[C(u_1) + C(u_2)].$$

Le déphasage des franges (à partir de leur position pour un point source) est Φ ; la visibilité des franges est donnée par

$$V = \frac{1}{4 h} \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \sqrt{[C(u_1) + C(u_2)]^2 + [S(u_1) + S(u_2)]^2}.$$

La connaissance de ces résultats nous permet de tracer les courbes de la figure IV.15 donnant le déphasage des franges en fonction de $\varphi = 4 \pi d/\lambda$ pour un angle donné. De même,

nous pourrions tracer la figure IV.16 donnant la visibilité des franges en fonction de $\Delta\varphi = \varphi(0) - \varphi(i) = \varphi i^2/2$, $\varphi(i)$ étant pris pour une source ponctuelle. Les courbes seront tracées dans deux cas particuliers : pour une fente parallèle à l'arête du coin ($\theta = \pi/2$) et pour une fente perpendiculaire à l'arête du coin.

a) *Fente parallèle à l'arête du coin.* — Pour une fente parallèle à l'arête du coin les résultats sont les mêmes que pour une lame à faces planes et parallèles. Donnons les résultats du déplacement des franges et de la visibilité (tableau IV). Les résultats pour la visibilité sont donnés pour $d/\lambda = 10^6$ et pour un coin d'angle $\alpha = 10^{-4}$.

TABLEAU IV. $i = 12,5 \times 10^{-4}$

d/λ	3×10^5	4×10^5	5×10^5	6×10^5	7×10^5	8×10^5	9×10^5	10^6
Φ	$0,29 \pi$	$0,23 \pi$	$0,3 \pi$	$0,22 \pi$	$0,18 \pi$	$0,20 \pi$	$0,25 \pi$	$0,30 \pi$

$\Delta\varphi$	π	2π	3π	4π	5π	6π
V	0,63	0,30	0,33	0,22	0,25	0,19

b) *Fente perpendiculaire à l'arête du coin.* — Les résultats sont donnés pour un coin d'angle $\alpha = 10^{-4}$ (tableau V). Nous avons de même étudié la visibilité des franges pour un coin tel que $d/\lambda = 10^6$.

TABLEAU V. $i = 12,5 \times 10^{-4}$

$(d/\lambda) 10^{-5}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Φ	$0,18 \pi$	$0,27 \pi$	$0,31 \pi$	$0,28 \pi$	$0,23 \pi$	$0,20 \pi$	$0,22 \pi$	$0,23 \pi$	$0,22 \pi$

$\Delta\varphi$	π	$3 \pi/2$	2π	$5 \pi/2$	3π	$7 \pi/2$	4π
V	0,59	0,39	0,33	0,32	0,29	0,27	0,26

On peut en déduire tous les cas intermédiaires : la projection $h \sin \theta$ n'intervient donc pas pour une fente d'orientation θ et de demi-longueur h , les franges seront celles d'une fente de longueur $h \cos \theta$. La visibilité dépend de l'épaisseur au centre et du coin α ; le terme dépendant de α est d'autant plus fort que $\alpha \cos \theta$ est plus grand.

Nous avons supposé que nous n'avions aucune diaphragmation, c'est-à-dire que les deux images pupillaires de la source étaient entièrement admises par la pupille de l'objectif. Mais nous devons envisager le cas où l'une des images est diaphragmée par la pupille de l'objectif.

Considérons la figure IV.17 représentant le plan de la pupille de sortie de l'objectif. Lorsque la source est une fente l'image directe est une droite, l'image par double réflexion est une ellipse. Lorsque la source est circulaire l'image directe est un cercle, l'image par double réflexion est une ellipse.

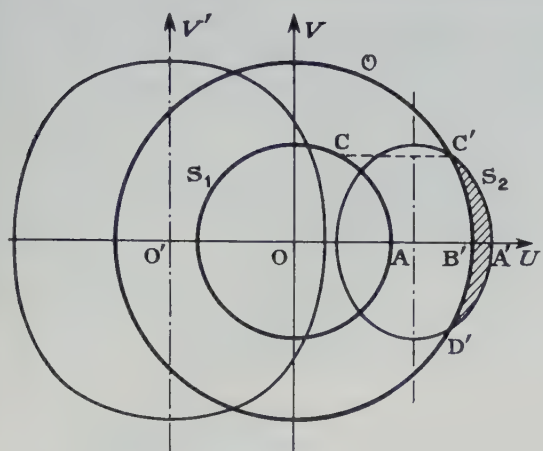


FIG. IV.17.

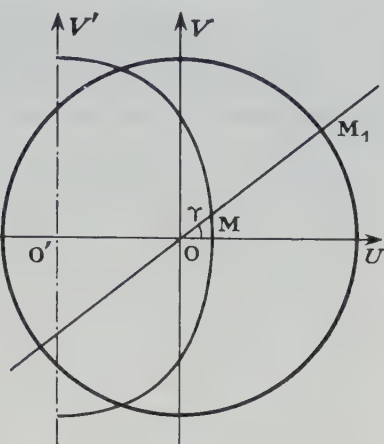


FIG. IV.18.

Représentons le phénomène de diaphragmation lorsque la source est un cercle (car la position de la seconde image est plus facile à tracer). Soit S_1 le cercle image directe, S_2 l'image par double réflexion et O la pupille de l'objectif. Pour certaines valeurs de l'angle α , le décalage est tel que l'ellipse S_2 et le cercle O deviennent sécants et, par conséquent, l'aire hachurée $B'C'A'D'$ ne donne lieu à aucune interférence. Les points de l'aire $B'C'A'D'$ sont conjugués de points de la source S_1 ; ces points ne participent pas aux phénomènes d'interférences et donneront lieu à un fond de lumière parasite. Ils augmentent la luminance du fond de l'image et diminuent d'autant le contraste des franges. On a donné les contours des images pupillaires dans l'hypothèse simplificatrice où seule la deuxième onde est inclinée. Dans le cas des ouvertures faibles on a vu que l'image d'un cercle était un cercle. L'aplanétisme n'intervient que pour des valeurs où l'approximation précédente n'est plus valable. Ces points pourront être trouvés en cherchant le conjugué du contour $C'B'D'$. Il nous faut donc chercher le lieu des points dont les transformés sont sur une circonférence de rayon égal à celui de la pupille de sortie de l'objectif.

Pour un point source donné (θ, i) , les deux images ont pour coordonnées

$$S_1 \begin{cases} U = -f_0 \sin i \cos \theta \\ V = -f_0 \sin i \sin \theta \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} U = f_0 (\sin 2\alpha \cos i - \cos 2\alpha \sin i \cos \theta) \\ V = -f_0 \sin i \sin \theta \end{cases}$$

dans le cas d'un instrument aplanétique. Soit R le rayon de la pupille de sortie de l'objectif. Pour trouver le conjugué de la pupille de l'objectif nous devons faire une translation de l'axe V telle que $\overline{OO'} = -\sin 2\alpha \sqrt{1 - R^2}$. Dans ces conditions le conjugué de la pupille de sortie est une ellipse dont l'équation est

$$\frac{U^2}{R^2 \cos^2 2\alpha} + \frac{V^2}{R^2} = 1.$$

Le conjugué de la pupille de sortie est une ellipse de demi-axes $R \cos 2\alpha$, R , centrée au point $O'(U = -\sin 2\alpha \sqrt{1 - R^2}, V = 0)$. Les demi-axes de l'ellipse

sont $R \cos 2\alpha$ et R ; donc quand α sera très faible on pourra dire que la transformée de la pupille de sortie est un cercle et on pourra en premier lieu utiliser cette approximation. Les points de la source situés à l'extérieur de cette ellipse ne donneront pas lieu à des interférences.

B) CAS D'UNE FENTE AVEC DIAPHRAGMATION DE L'UNE DES IMAGES PUPILLAIRES PAR LA PUPILLE DE L'OBJECTIF. — Soit une fente de longueur égale à $h_1 = \sin i_1$ et dont la direction est $\alpha = \operatorname{tg} \gamma$ (fig. IV.18). Les conditions limites sont données dans le cas d'un instrument aplanétique.

L'image de la pupille de sortie est, nous l'avons vu, une ellipse centrée sur l'axe OU au point d'abscisse $U = -\sin 2\alpha \sqrt{1 - R^2}$. Lorsqu'il n'y avait aucune diaphragmation le domaine d'intégration s'étendait de $-h_1$ à $+h_1$. Envisageons maintenant le cas général.

L'image directe est la droite d'équation $V = aU$. Nous devons donc rechercher l'intersection de la droite $V = aU$ avec l'image de la pupille de l'objectif pour avoir les coordonnées du point M. L'abscisse du point M est solution de l'équation

$$U^2(1 + a^2 \cos^2 2\alpha) - 2a^2 \sin 2\alpha \cos^2 2\alpha U - R^2 \cos^2 2\alpha + a^2 \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha \cos^2 u_0 = 0.$$

Les bornes de l'intégrale (8) seraient donc

$$-\sin i \quad \text{et} \quad h'_1 = \frac{\sqrt{\Delta'_1} - \sin 2\alpha \cos u_0}{1 + a^2 \cos^2 2\alpha} \sqrt{1 + a^2} = OM,$$

avec

$$\Delta'_1 = \sin^2 u_0 \cos^2 2\alpha (1 + a^2 \cos^2 2\alpha) - a^2 \cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha \cos^2 u_0.$$

Suivant les valeurs de α il y aura ou non diaphragmation. Nous allons déterminer les valeurs limites de α . Nous pouvons constater immédiatement que si $i = u_0$ la diaphragmation interviendra dès que l'angle α du coin sera différent de 0. Dans les autres cas il y aura une valeur limite α_c à partir de laquelle il y aura diaphragmation; en effet, supposons une fente de longueur $h_2 = f_c \sin i$; la diaphragmation intervient à partir du moment où $OM = h_2$, ce qui donne, en effectuant les calculs,

$$\sin 2\alpha_c = \left(-\frac{\sin i \cos u_0}{\sqrt{1 + a^2}} + \sqrt{\Delta'_2} \right) / \left(1 - \frac{a^2 \sin^2 i}{1 + a^2} \right),$$

avec

$$\Delta'_2 = \cos^2 i [\sin^2 u_0 - a^2 (\sin^2 i - \sin^2 u_0)] / (1 + a^2).$$

Tant que l'angle α n'a pas atteint la valeur α_c ($\alpha < \alpha_c$), le déphasage des franges et leur visibilité sont les mêmes que sans diaphragmation. Les résultats sont ceux du paragraphe IV.2.1A. La fente entière intervient.

Nous pouvons constater sur la figure IV.18 que pour certaines valeurs de α le décalage de l'ellipse image de la pupille de sortie de l'objectif sera tel qu'aucun point de la fente source ne soit à l'intérieur de l'ellipse; ceci entraîne la disparition du phénomène d'interférences; en effet, l'une des images de la fente se trouve rejetée en dehors de la pupille de sortie. Nous pouvons calculer la valeur limite de l'angle α soit α_1 pour lequel il y a disparition du phénomène d'interférences. La disparition des franges se produit pour $OM = -f_0 \sin i$, d'où

$$\sin 2\alpha_1 = \left(\frac{\sin i \cos u_0}{\sqrt{1+a^2}} + \sqrt{\Delta_2'} \right) / \left(1 - \frac{a^2 \sin^2 i}{1+a^2} \right).$$

Si $\alpha_c < \alpha < \alpha_1$ il y aura diaphragmation. Nous pourrions tracer la courbe donnant le rapport h'_1/h (si h est la longueur de la fente et h'_1 la longueur diaphragmée) en fonction de α . Connaissant cette courbe, nous saurons, pour un coin d'angle α donné, déterminer le rapport h'_1/h et, par conséquent, nous connaîtrons les bornes d'intégration d'où l'on déduira la visibilité et le déplacement des franges.

En effet l'intensité I est la somme de deux intensités $I = I_1 + I_2$; l'intensité I_1 est due aux interférences et a pour expression $I_1 = 2s' [1 + (V'_1/s') \cos(2kL + \Phi)]$, où $V'_1 = \sqrt{C^2 + S^2}$, soit, en appelant V_1 la visibilité, $I_1 = 2s' [1 + V_1 \cos(2kL + \Phi)]$. L'intensité I_2 est due à la surface ne participant pas aux interférences; pour cette surface il y a transmission d'énergie; le phénomène à deux ondes est une approximation très valable, pour des facteurs de réflexion faibles, des franges à ondes multiples (ce résultat s'applique au cas de l'interféromètre de Michelson et dérivés).

$$I_2 = 2a^2(s - s'), \quad \text{d'où} \quad I = 2s [1 + (s'/s) V_1 \cos(2kL + \Phi)].$$

La visibilité est multipliée par le facteur s'/s (rapport des aires).

Nous allons étudier différents cas particuliers.

a) *Mise au point sur le plan de localisation.* — Nous avons vu que dans le cas où la diaphragmation intervient les bornes d'intégration sont $-h$ et h'_1 (h'_1 étant donné par les formules précédentes). Dans ce cas les intégrales C et S deviennent

$$C = \int dy \int_{-h}^{h'_1} \cos(kd h^2) dh, \quad S = \int dy \int_{-h}^{h'_1} \sin(kd h^2) dh,$$

d'où, avec les intégrales de Fresnel,

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda/d} [\mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2)], \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda/d} [\mathbf{S}(u_1) + \mathbf{S}(u_2)],$$

$$u_1 = 2\sqrt{d/\lambda} h, \quad u_2 = 2\sqrt{d/\lambda} h'_1.$$

Le déphasage a pour expression Φ avec $\operatorname{tg} \Phi = [\mathbf{S}(u_1) + \mathbf{S}(u_2)] / [\mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2)]$ et la visibilité s'exprime par

$$V = \frac{1}{s} \sqrt{C^2 + S^2} = \frac{1}{4(h'_1 + h)} \sqrt{[\mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2)]^2 + [\mathbf{S}(u_1) + \mathbf{S}(u_2)]^2}.$$

La visibilité dépend dans ce cas de l'angle du coin du fait que la longueur h'_1 dépend du coin.

Dans le cas particulier où la fente est parallèle à l'arête du coin, les résultats seront les mêmes dans le cas où la mise au point est faite sur le plan de localisation ou sur la surface supérieure du coin.

b) *Fente parallèle à l'arête du coin.* — Une fente parallèle à l'arête du coin se trouve sur l'axe OV (fig. IV. 18). Pour différentes valeurs de l'angle α , le contour elliptique, image de la pupille de l'objectif, se déplace de quantités variables mais coupe l'axe OV en deux points symétriques par rapport au centre. Le domaine d'intégration se trouve réduit; les bornes de l'intégrale sont symétriques; la diaphragmation se ramène seulement à l'emploi d'une fente centrée et plus courte. Les bornes de l'intégrale sont données par

$$h'_1 = \pm \sin u_0 \sqrt{1 - (\sin^2 2\alpha \cos^2 u_0 / \sin^2 u_0 \cos^2 2\alpha)}.$$

Cherchons les valeurs α_c et α_1 : $\operatorname{tg}^2 2\alpha_c = (\sin^2 u_0 - \sin^2 i) / \cos^2 u_0$. Nous constatons que si la longueur de la fente est égale à l'ouverture, la diaphragmation intervient tout de suite. Le phénomène d'interférences ne se produit plus à partir de $\alpha_1 = u_0/2$.

c) *Fente perpendiculaire à l'arête du coin.* — Dans le cas d'une fente perpendiculaire à l'arête du coin les valeurs des angles limites sont données par $(u_0 - i)/2 \leq \alpha \leq (u_0 + i)/2$. Le domaine d'intégration est la fente entière tant que $2\alpha < u_0 - i$. Considérons d'abord le cas où la mise au point est faite dans le plan de localisation et supposons une fente dont la longueur est telle que $i = u_0$; la longueur de la fente est égale au diamètre de la pupille de sortie. Si l'angle du coin est nul les deux images pupillaires sont confondues et contenues dans la pupille ; dans le cas contraire l'une des images est diaphragmée par la pupille et l'expression de la visibilité, qui est diminuée, est donnée par

$$V_1 = \sqrt{C^2 + S^2/s'},$$

avec

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda/d} [\mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2)] \quad , \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda/d} [\mathbf{S}(u_1) + \mathbf{S}(u_2)] \quad ,$$

où $u_1 = 2 \sqrt{d/\lambda} u_0$, $u_2 = 2 \sqrt{d/\lambda} (u_0 - 2\alpha)$ et le déphasage est Φ avec $\operatorname{tg} \Phi = [\mathbf{S}(u_1) + \mathbf{S}(u_2)] / [\mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2)]$.

Supposons maintenant que la mise au point soit faite sur la face supérieure du coin soit dans le plan $z = 0$ (introduction d'un défaut de mise au point) et, comme dans le cas précédent, prenons une fente de longueur $i = u_0$; les remarques au sujet de la position des images pupillaires restent valables. Donnons ici l'expression de la visibilité diminuée et du déphasage : $V_1 = \sqrt{C^2 + S^2/s'}$,

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \left\{ \cos(k d \alpha^2) [\mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2)] + \sin(k d \alpha^2) [\mathbf{S}(u_1) + \mathbf{S}(u_2)] \right\} ,$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \left\{ -\sin(k d \alpha^2) [\mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2)] + \cos(k d \alpha^2) [\mathbf{S}(u_1) + \mathbf{S}(u_2)] \right\} ,$$

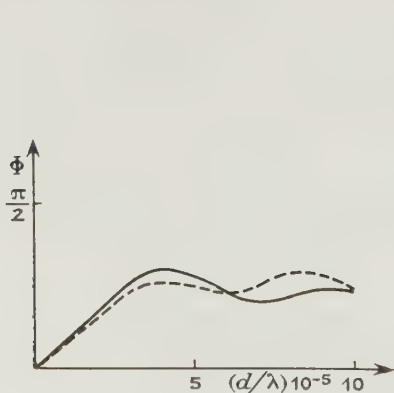


FIG. IV.19. $\alpha = 10^{-4}$.

En trait plein, sans diaphragmation ;
en tirets, avec diaphragmation.

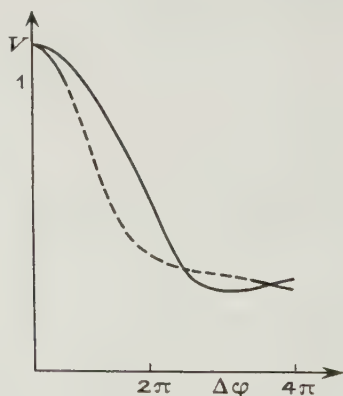


FIG. IV.20. $\alpha = 10^{-4}$; $d/\lambda = 10^6$.

En trait plein, avec diaphragmation ;
en tirets, sans diaphragmation.

où $u_1 = 2 \sqrt{d/\lambda} (u_0 - 3 \alpha)$, $u_2 = 2 \sqrt{d/\lambda} (u_0 + \alpha)$. D'autre part le déphasage des franges est Φ avec $\text{tg } \Phi = \text{tg}(\Phi_1 - \Phi_2)$,

$\text{tg } \Phi_1 = \text{tg} (k d \alpha^2) \quad , \quad \text{tg } \Phi_2 = [\mathbf{S}(u_1) + \mathbf{S}(u_2)]/[\mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2)]$.

Les figures IV.19 et 20 montrent les variations du déphasage et de la visibilité des franges (tableau VI). La courbe de visibilité est tracée dans les conditions suivantes : $d/\lambda = 10^6$, $\alpha = 10^{-4}$ en fonction de $\Delta\varphi = \varphi i^2/2$.

$$V_1 = \frac{1}{4 h} \sqrt{\frac{\lambda}{d}} \sqrt{[\mathbf{C}(u_1) + \mathbf{C}(u_2)]^2 + [\mathbf{S}(u_1) + \mathbf{S}(u_2)]^2}.$$

TABLEAU VI. $i = 12,5 \times 10^{-4}$, $\alpha = 10^{-4}$

d/λ	2×10^5	3×10^5	4×10^5	5×10^5	6×10^5	7×10^5	8×10^5	9×10^5	10^6
Φ	$0,17 \pi$	$0,23 \pi$	$0,26 \pi$	$0,25 \pi$	$0,24 \pi$	$0,25 \pi$	$0,29 \pi$	$0,28 \pi$	$0,24 \pi$

$\Delta\varphi$	2π	3π	4π	$5 \pi/2$
V	0,415	0,238	0,280	0,27

Nous avons vu que connaissant le rapport h'_1/h nous pouvions en déduire la visibilité et le déphasage des franges. La courbe (fig. IV.21) donne le rapport h'_1/h dans le cas d'un exemple : ouverture numérique de l'objectif $\sin u_o = 0,7$, ouverture numérique du condenseur $\sin u_c = 0,5$. Sur le graphique nous avons tracé les courbes dans les cas d'une fente parallèle à l'arête du coin, d'une fente perpendiculaire à l'arête ($a = 0$) et d'une fente faisant un angle de 45° ($a = 1$). Pour avoir les valeurs du rapport h'_1/h on peut opérer graphiquement (fig. IV.22) en traçant les ellipses correspondant aux images de la pupille de l'objectif (ellipse centrée au point d'abscisse $-\sin 2 \alpha \cos u$ et de demi-axes $\sin u$ et $\sin u \cos 2 \alpha$) et en traçant la fente. On peut ainsi mesurer directement le rapport h'_1/h .

Sur la figure IV.21 nous remarquons qu'en utilisant une fente parallèle à

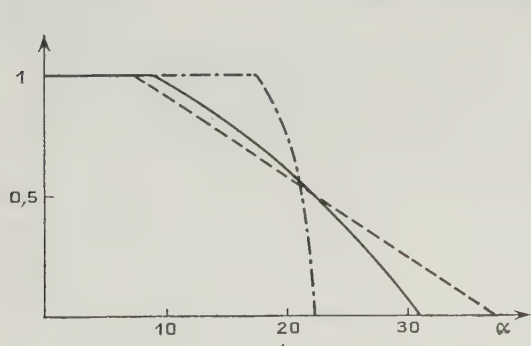


FIG. IV.21. $\sin u_o = 0,7$, $\sin u_c = 0,5$.
En trait plein, $a = 1$, en tirets, $a = 0$;
en trait mixte, $x = 0$.

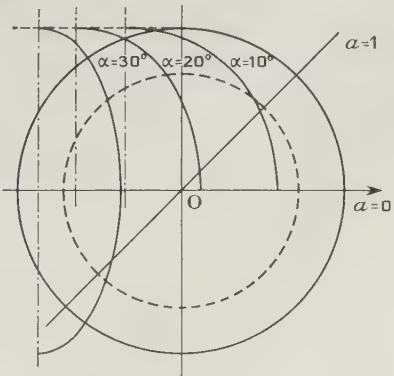


FIG. IV.22. $\sin u_o = 0,7$, $\sin u_c = 0,5$.

l'arête du coin, l'angle limite α_c est le plus grand d'où l'intérêt d'utiliser une fente parallèle à l'arête du coin.

Voici les limites α_c et α_1 correspondant à ces trois cas :

fente parallèle à l'arête du coin	fente perpendiculaire	fente à 45°
$\alpha_c = 17^{\circ}14'$	$7^{\circ}13'$	$8^{\circ}58'$
$\alpha_1 = 22^{\circ}13'$	$37^{\circ}13'$	$30^{\circ}57'$

C) FENTE ÉTROITE EXCENTRÉE. — Le cas d'une fente excentrée est un cas intéressant ; avec une fente excentrée parallèle à l'arête du coin, nous montrerons qu'il est possible d'augmenter la résolution. Nous traiterons le cas général d'une fente excentrée (fig. IV. 23). La position de la fente est déterminée par sa direction θ et par la distance s du centre à la fente.

La fonction D du paragraphe IV.2.1 s'écrit, quelle que soit la mise au point,

$$D = -\frac{1}{2} d h^2 + (d + z) \alpha h \cos \theta - \frac{1}{2} d s^2 + (d + z) \alpha b$$

$$= -\frac{1}{2} d h^2 + (d + z) \alpha h \cos \theta - D' = D_c - D',$$

avec $D' = \frac{1}{2} d s^2 - (z + d) \alpha b$; D_c est la valeur particulière de la fonction D pour une fente centrée (voir § IV. 2. 1A). Afin de déterminer la visibilité et le déphasage nous calculons les intégrales C et S

$$C' = \int \cos 2k D ds = \cos 2k D' \int \cos 2k D ds + \sin 2k D' \int \sin 2k D ds$$

$$= C \cos 2k D' + S \sin 2k D',$$

$$S' = \int \sin 2k D ds = \cos 2k D' \int \sin 2k D ds - \sin 2k D' \int \cos 2k D ds$$

$$= S \cos 2k D' - C \sin 2k D',$$

d'où la valeur du déphasage

$$\text{tg } \Phi' = \frac{S'}{C'} = \frac{S \cos 2k D' - C \sin 2k D'}{C \cos 2k D' - S \sin 2k D'} = \text{tg } (\Phi'_1 + \Phi'_2).$$

Le déphasage est la somme de deux déphasages donnés par

$$\text{tg } \Phi'_1 = \text{tg } 2k D', \quad \text{tg } \Phi'_2 = S/C;$$

il est égal au déphasage pour une fente centrée auquel vient se superposer un déphasage dû à l'excentrement et dont la valeur est donnée par Φ'_1 avec

$$\text{tg } \Phi'_1 = \text{tg } 2k D'.$$

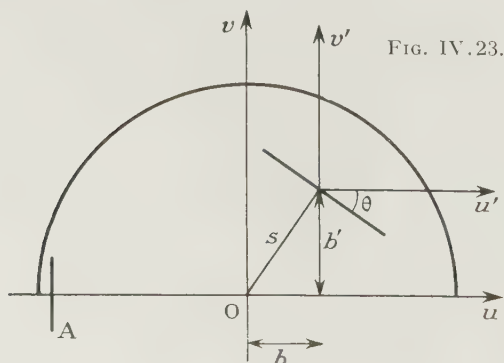


FIG. IV. 23.

La visibilité des franges

$$V = \sqrt{C'^2 + S'^2} = \sqrt{C^2 + S^2}$$

a la même expression que dans le cas d'une fente centrée mais les bornes d'intégration ne sont pas les mêmes. Dans le cas d'une fente parallèle à l'arête du coin et placée en A comme l'indique la figure IV. 23 l'angle limite sera obtenu pour une position de l'ellipse telle que $u_0 = \alpha$.

Nous pouvons remarquer que la résolution est double d'où l'intérêt d'employer une source excentrée. Il existe des objectifs de microscope travaillant à sec, d'ouverture numérique 0,95, $u_0 = 72^\circ$; il est donc possible de résoudre les franges d'un coin d'air d'angle 72° .

D) SOURCE RECTANGULAIRE CENTRÉE PARALLÈLE À L'ARÊTE DU COIN. — Redonnons ici l'expression de D dans le cas d'une mise au point quelconque mais pour des angles d'ouverture et de coin faibles, $D = -\frac{1}{2}d(u^2 + v^2) + (d + z)u\alpha$. Etudions les franges dans le plan de localisation soit, nous l'avons vu, dans le plan $z = -d$, d'où $D = -\frac{1}{2}d(u^2 + v^2)$. Nous constatons que les résultats sont identiques à ceux obtenus pour une lame à faces parallèles. Rappelons les expressions qui ont été trouvées : pour le déphasage

$$\operatorname{tg} \Phi = [\mathbf{S}(u') \mathbf{C}(v') + \mathbf{S}(v') \mathbf{C}(u')]/[\mathbf{C}(u') \mathbf{C}(v') - \mathbf{S}(u') \mathbf{S}(v')] = S_1/C_1,$$

avec

$$\mathbf{S}(u') = \int_0^{u'} \sin\left(\frac{\pi}{2} u'^2\right) du' \quad , \quad \mathbf{C}(u') = \int_0^{u'} \cos\left(\frac{\pi}{2} u'^2\right) du'$$

et $u' = \sqrt{\varphi/\pi} u$, $v' = \sqrt{\varphi/\pi} v$ et, pour la visibilité, $V = \sqrt{C_1^2 + S_1^2}/a b$, si a et b sont les dimensions de la fente.

Etudions maintenant les franges dans le plan de la face supérieure du coin soit pour $z = 0$. Dans ce cas on peut écrire D sous la forme $D = -\frac{1}{2}d(u - \alpha)^2 + \frac{1}{2}d(\alpha^2 - v^2)$. Le calcul des intégrales C et S donne

$$\begin{aligned} C &= 2 \frac{\pi}{\varphi} \cos k d \alpha^2 \left\{ [\mathbf{C}(p_1) + \mathbf{C}(p_2)] \mathbf{C}(q) - [\mathbf{S}(p_1) + \mathbf{S}(p_2)] \mathbf{S}(q) \right\} + \\ &\quad + 2 \frac{\pi}{\varphi} \sin k d \alpha^2 \left\{ [\mathbf{C}(p_1) + \mathbf{C}(p_2)] \mathbf{S}(q) + [\mathbf{S}(p_1) + \mathbf{S}(p_2)] \mathbf{C}(q) \right\} \\ S &= 2 \frac{\pi}{\varphi} \cos k d \alpha^2 \left\{ [\mathbf{S}(p_1) + \mathbf{S}(p_2)] \mathbf{C}(q) + [\mathbf{C}(p_1) + \mathbf{C}(p_2)] \mathbf{S}(q) \right\} - \\ &\quad - 2 \frac{\pi}{\varphi} \sin k d \alpha^2 \left\{ [\mathbf{C}(p_1) + \mathbf{C}(p_2)] \mathbf{C}(q) - [\mathbf{S}(p_1) + \mathbf{S}(p_2)] \mathbf{S}(q) \right\}. \end{aligned}$$

Le déphasage est Φ avec $\operatorname{tg} \Phi = S/C$. La visibilité est donnée par $V = \sqrt{C^2 + S^2}/a b$, où $p_1 = \sqrt{\varphi/\pi}(u - \alpha)$, $p_2 = \sqrt{\varphi/\pi}(u + \alpha)$, $q = \sqrt{\varphi/\pi} v$ et $\mathbf{S}$ et $\mathbf{C}$ sont les expressions précédentes.

E) SOURCE RECTANGULAIRE EXCENTRÉE PARALLÈLE À L'ARÊTE DU COIN. — Etudions les franges dans le plan de localisation; l'expression de D est la même qu'au paragraphe précédent; u varie de u_1 à u_2 . On peut calculer d'une manière identique les intégrales S et C : nous ne donnerons ici que les résultats des calculs

$$\begin{aligned} C &= (\pi/\varphi) \left\{ \mathbf{C}(q) [\mathbf{C}(p_2) - \mathbf{C}(p_1)] - \mathbf{S}(q) [\mathbf{S}(p_2) - \mathbf{S}(p_1)] \right\}, \\ S &= (\pi/\varphi) \left\{ \mathbf{C}(q) [\mathbf{S}(p_2) - \mathbf{S}(p_1)] + \mathbf{S}(q) [\mathbf{C}(p_2) - \mathbf{C}(p_1)] \right\}, \end{aligned}$$

où $p_1 = \sqrt{\varphi/\pi} u_1$, $p_2 = \sqrt{\varphi/\pi} u_2$, $q = \sqrt{\varphi/\pi} v$. Le déphasage Φ est le même que celui pour une lame à faces parallèles et a pour expression $\operatorname{tg} \Phi = S/C$. La visibilité est la même que pour une lame à faces parallèles avec une source rectangulaire excentrée.

Dans le cas où la mise au point est faite sur la face supérieure du coin ($z = 0$) les calculs donnent pour expression de D : $D = -\frac{1}{2}d[u - (\alpha - b)]^2 + \frac{1}{2}d(\alpha^2 - v^2)$; b est l'excentrement

de la source rectangulaire. On remarque que les expressions de S et C sont les mêmes que pour la mise au point faite sur le plan de localisation mais où $p_1 = \sqrt{\varphi/\pi} [u_1 - (\alpha - b)]$, $p_2 = \sqrt{\varphi/\pi} [u_2 - (\alpha - b)]$, $q = \sqrt{\varphi/\pi} v$, d'où des expressions identiques pour le déphasage et la visibilité.

2. La source est circulaire et centrée sur l'axe [11]. — A) Considérons un coin d'angle α tel que les deux images pupillaires d'une source centrée circulaire passent sans diaphragme. Nous avons donné au paragraphe IV.2 l'expression générale de l'intensité des franges, de leur visibilité et du déphasage.

Rappelons les expressions

$$I = 2 a^2 s [1 + (V'/s) \cos (2 k L + \Phi)], \quad V' = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad \text{tg } \Phi = S/C,$$

où

$$C = \int_s \cos 2 k D \, ds, \quad S = \int_s \sin 2 k D \, ds.$$

Nous nous limiterons dans le calcul aux angles α et i faibles. Remarquons à cette occasion que la relation des sinus ne nous est pas utile. Avec $D = -\frac{1}{2} d i^2 + (d + z) u \alpha$, calculons C et S dans le cas d'une source circulaire centrée

$$C = \int \cos 2 k D \, ds = \int_0^r \int_0^{2\pi} \cos 2 k \left[-\frac{d i^2}{2} + (d + z) r \alpha \cos \theta \right] r \, dr \, d\theta,$$

où r est le rayon angulaire de la source.

Étudions d'abord les franges dans le plan de localisation. Nous avons vu que cela correspondait au plan $z = -d$ et dans ce cas l'expression D devient $D = -d i^2/2$ et nous sommes ramenée à calculer les intégrales C et S données par

$$C = \int_0^r \int_0^{2\pi} \cos 2 k \left(-\frac{d i^2}{2} \right) i \, di \, d\theta, \quad S = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sin 2 k \left(-\frac{d i^2}{2} \right) i \, di \, d\theta.$$

Nous allons montrer que, dans ce cas, les résultats sont identiques à ceux d'une lame à faces parallèles ; en effet

$$C = (\pi/k d) \sin k d i^2, \quad S = (\pi/k d) (\cos k d i^2 - 1),$$

soit, puisque la visibilité s'exprime par $V = \sqrt{C^2 + S^2}/\pi i^2$,

$$V = \frac{\sin (k d i^2/2)}{k d i^2/2}$$

et le déphasage a pour expression Φ avec $\text{tg } \Phi = S/C = \text{tg}(k d i^2/2)$, donc $\Phi = k d i^2/2$, ce qui est d'ailleurs visible sur le spectre de fréquence des intensités moyennes.

Nous retrouvons bien ici les résultats obtenus pour une lame à faces parallèles et les courbes seront identiques à celles tracées au paragraphe IV.1.1.

Nous allons faire l'analyse harmonique des franges d'interférences d'un coin d'air de très petit angle α au voisinage de l'épaisseur optique $z_0 = 2 d_0$. On prendra la transformée de Fourier de l'intensité

$$I = 2 \pi i^2 \left\{ 1 + \left[\frac{\sin \frac{1}{2} k (d_0 + \alpha x) i^2}{\frac{1}{2} k (d_0 + \alpha x) i^2} \cos [2 k (d_0 + \alpha x) - \frac{1}{2} k (d_0 + \alpha x) i^2] \right] \right\},$$

soit en prenant la transformée de Fourier et en prenant λ comme unité

$$G(s) = \left\{ \delta(s) + \frac{1}{i^2} \left[\text{Rect } \frac{s}{2} - \text{Rect } \frac{s}{2(1 - \frac{1}{2} i^2)} \right] \right\} \cos 2 \pi d_0 s,$$

d'où la représentation du spectre en fréquences de l'intensité (fig. IV.24).

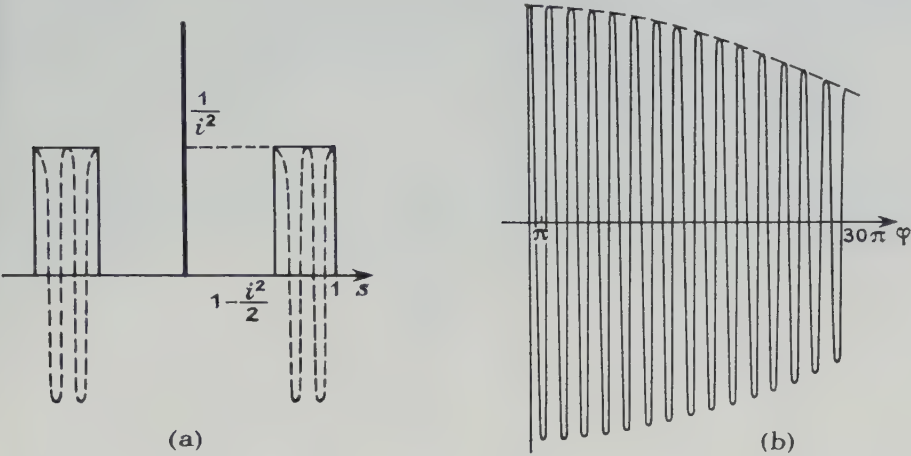


FIG. IV.24. — b) $i = 15^\circ = 0,262 \text{ rd}$. En trait plein, $\cos \varphi \left(1 - \frac{i^2}{4} \right) \frac{\sin (\varphi i^2/4)}{\varphi i^2/4}$;
en tirets, $\frac{\sin (\varphi i^2/4)}{\varphi i^2/4}$.

Lorsque la source était ponctuelle on avait

$$G(s) = \delta(s) + \frac{1}{2} \delta(s - 1) + \frac{1}{2} \delta(s + 1) .$$

Supposons maintenant que la mise au point soit faite sur la face supérieure du coin donc pour le plan $z = 0$. Dans ce cas les intégrales à calculer sont

$$C = \int_0^r \int_0^{2\pi} \cos 2k \left(-d \frac{r^2}{2} + dr \alpha \cos \theta \right) r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^r \cos kd r^2 \mathbf{J}_0(2kdr\alpha) r \, dr ,$$
$$S = 2\pi \int_0^r \sin kd r^2 \mathbf{J}_0(2kdr\alpha) r \, dr .$$

Les fonctions S et C seront calculées à l'aide des fonctions de Lommel ([2] p. 437). Les fonctions de Lommel sont définies par les expressions suivantes :

$$\mathbf{U}_n(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{u}{v} \right)^{n+2s} \mathbf{J}_{n+2s}(v) , \quad \left| \frac{u}{v} \right| < 1 ,$$
$$\mathbf{V}_n(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{v}{u} \right)^{n+2s} \mathbf{J}_{n+2s}(v) , \quad \left| \frac{v}{u} \right| < 1 ,$$

Nous posons $v = 2kd\alpha$, $u = 2kd$, $\omega = 2kdr^2$. Pour intégrer les expressions S et C nous utiliserons la relation

$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} \mathbf{J}_{n+1}(x)] = x^{n+1} \mathbf{J}_n(x)$$

et nous intégrons par parties

$$C = \frac{2\pi}{v} \int \frac{d}{dr} [r \mathbf{J}_1(vr)] \cos \left(\frac{1}{2} u r^2 \right) dr ,$$

d'où les expressions, lorsque $|u/v| < 1$,

$$C = \pi r^2 \frac{2}{\omega} \left(\mathbf{U}_1 \cos \frac{\omega}{2} + \mathbf{U}_2 \sin \frac{\omega}{2} \right) , \quad S = \pi r^2 \frac{2}{\omega} \left(\mathbf{U}_1 \sin \frac{\omega}{2} - \mathbf{U}_2 \cos \frac{\omega}{2} \right) .$$

Dans le cas où $|u/v| > 1$ nous aurons les expressions équivalentes :

$$C = \pi r^2 \frac{2}{\omega} \left(\sin \frac{v^2 r^2}{2\omega} + V_0 \sin \frac{\omega}{2} - V_1 \cos \frac{\omega}{2} \right),$$

$$S = \pi r^2 \frac{2}{\omega} \left(\cos \frac{v^2 r^2}{2\omega} - V_0 \cos \frac{\omega}{2} - V_1 \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

Nous pouvons en déduire l'expression du déphasage et de la visibilité des franges. Le déphasage Φ est donné par la relation $\operatorname{tg} \Phi = S/C$. La courbe de la figure IV.25a a été tracée dans le cas particulier où l'angle du coin est égal à 10^{-3} et où d est égal à 5 mm (ce qui donne avec

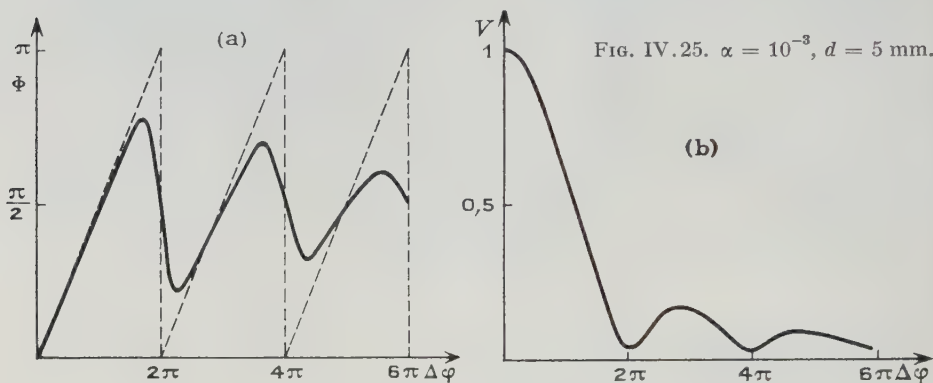


FIG. IV.25. $\alpha = 10^{-3}$, $d = 5$ mm.

$\lambda = 0,6 \mu$, un interfrange égal à 0,3 mm). Les calculs de S et de C ont été faits en prenant pour U_1 , U_2 , V_0 , V_1 les valeurs obtenues par les développements limités ; on peut d'ailleurs constater que les séries sont rapidement convergentes. La courbe donnant le déplacement des franges présente des oscillations amorties. La courbe tracée en tirets est celle que nous avons obtenue lors de l'étude des interférences en teinte plate. La comparaison des deux courbes permet de voir l'influence du coin sur le déplacement des franges.

Nous avons de même tracé les courbes donnant la visibilité des franges (fig. IV.25b) et le contraste (fig. IV.25c) en fonction de $\Delta\varphi = 2\pi d i^2/\lambda$. Sur les graphiques nous constatons que les minima ne sont plus nuls.

Expression de la visibilité des franges :

$$V' = \pi r^2 \frac{2}{\omega} \sqrt{U_1^2 + U_2^2} \quad \text{si} \quad \left| \frac{v^2 r^2}{\omega} \right| < 1,$$

$$V' = \pi r^2 \frac{2}{\omega} \sqrt{1 + V_0^2 + V_1^2 - 2V_0 \cos \left(\frac{\omega}{2} + \frac{v^2 r^2}{2\omega} \right) - 2V_1 \sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{v^2 r^2}{2\omega} \right)} \quad \text{si} \quad \left| \frac{v^2 r^2}{\omega} \right| > 1.$$

L'expression du contraste d'après notre définition est $\gamma = 2V'/(1 + V')$. Dans le cas des courbes précédentes, on a les valeurs du tableau VII.

TABLEAU VII

$\Delta\varphi$	0	π	2π	3π	4π	6π
γ	1	0,75	0,07	0,28	0,06	0,06

Nous pouvons par les calculs précédents retrouver les expressions dans le cas particulier suivant. Pour un coin d'épaisseur nulle au centre nous trouvons

$$\varphi = (4\pi/\lambda) [x \sin \alpha (\cos i \cos \alpha + \sin i \sin \alpha \cos \theta)],$$

soit

$$I = \int_0^i \int_0^{2\pi} \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} x \cos i \right) \sin i \cos i \, di \, d\theta + \int_0^i \int_0^{2\pi} \sin i \cos i \, di \, d\theta.$$

Nous retrouvons les mêmes résultats qu'au chapitre précédent.

Les calculs ont été faits jusqu'ici en admettant la condition $\cos u \simeq 1 - (u^2/2)$; cette condition est valable pour des angles d'environ 35° , au delà cette approximation n'est plus suffisante. Aussi nous allons donner l'expression de l'intensité dans le cas général.

Nous avons donné l'expression de la différence de phase dans le cas général : $\varphi = (4\pi/\lambda) (-x \sin \alpha \cos \alpha_2 + d \cos i)$, avec $\cos \alpha_2 = \cos i \cos \alpha + \sin i \sin \alpha \cos \theta$, d'où l'expression de la différence de phase

$$\varphi = -2kx \sin \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta) + 2kd \cos i,$$

d'où l'expression de l'intensité

$$I = \int_0^i \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \cos [-2kx \sin \alpha (\cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i \cos \theta) + 2kd \cos i] \right\} \times \\ \times \sin i \cos i \, di \, d\theta,$$

d'où, en intégrant par rapport à θ ,

$$I = \pi \sin^2 i + 2\pi \int_0^i \cos [2k(-x \sin \alpha + d) \cos i] J_0(2kx \sin^2 \alpha \sin i) \sin i \cos i \, di.$$

Pour avoir l'intensité nous devrions intégrer cette expression et nous aurons la répartition d'intensité en fonction de x pour une ouverture donnée. Connaissant les valeurs de x qui correspondent à des maxima ou des minima nous connaissons les épaisseurs du coin pour lesquelles nous avons des franges, nous en déduisons donc le déplacement des franges.

B) Nous n'avons envisagé jusqu'ici que le cas où les deux images pupillaires étaient entièrement contenues dans la pupille de l'objectif. Considérons le cas où la pupille de l'objectif diaphragme l'une des images pupillaires. Nous avons vu au paragraphe IV.2.1 que dans le cas d'un instrument aplanétique l'image directe d'une source circulaire est circulaire et que l'image par double réflexion est une ellipse centrée au point d'abscisse $f_0 \sin 2\alpha \sqrt{1 - (\rho_1^2/f_0^2)}$, si ρ_1 est le rayon de la source, f_c et f_0 les longueurs focales du condenseur et de l'objectif. D'autre part, la longueur de l'axe de l'ellipse suivant l'axe OU est $f_0 (\rho_1/f_c) \cos 2\alpha$. Donc nous

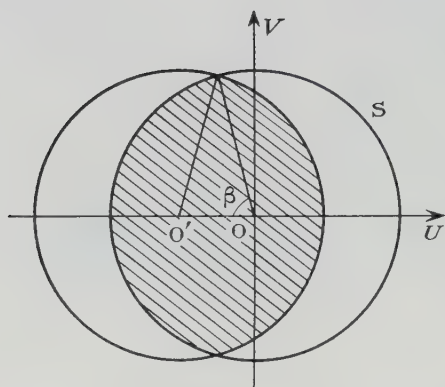


FIG. IV.26. — S, source.

ellipse. Lorsque l'on assimile l'angle et l'arc, l'ellipse sera assimilable à un cercle et le domaine sera l'aire commune à deux cercles.

L'expression de l'intensité est donnée par

$$I = I_{\text{fond}} + \int_{s'} (1 + \cos \varphi) ds,$$

où s' est la surface utile de la pupille. Dans le cas où la source entière n'est pas utilisée le domaine d'intégration s' sera l'aire commune à un cercle (source) et une ellipse (image de la pupille de l'objectif) [fig. IV.26]. Suivant la valeur de l'angle α l'ellipse est plus ou moins décalée d'où une variation du rapport de l'aire utile s' à l'aire totale s de la source. Nous étudierons la variation du rapport s'/s . Nous étudierons en première approximation le cas où l'ellipse est confondue avec un cercle. Cette approximation n'est valable que pour des angles faibles.

Première approximation. Soit le cas de la figure IV.26. Deux cas sont à envisager :

- 1° l'objectif et le condenseur ont la même ouverture numérique ;
- 2° ils ont des ouvertures numériques différentes.

Dans le premier cas, le domaine d'intégration est l'aire commune à deux cercles de même rayon et le rapport s'/s s'exprime par la relation

$$\frac{s'}{s} = \frac{2\beta}{\pi} - \frac{\sin 2\beta}{2\pi},$$

avec $\sin 2\beta = \sin 2\alpha \cos u \sqrt{4 \sin^2 u - \sin^2 2\alpha \cos^2 u} / 2 \sin^2 u$. Le rapport s'/s ne sera égal à 1 que si $\alpha = 0$. D'autre part nous verrons ultérieurement que les franges ne seront plus résolues lorsque $\alpha > u$. Nous avons tracé les courbes $\sqrt{s'/s} = f(\alpha)$ [fig. 4.27]

dans le cas où $\sin u = 0,18$ (tableau VIII) et $\sin u = 0,7$. Nous obtenons ainsi un réseau de courbes $\sqrt{s'/s} = f(\alpha)$ pour des ouvertures numériques données. La surface s' utilisable cor-

concevons que l'ellipse peut être diaphragmée par la pupille de l'objectif (fig. IV.17). Nous avons montré que l'image de la pupille de sortie de l'objectif par la transformation donnée est une ellipse de demi-axes $R \cos 2\alpha$, R , centrée au point $U = -f_0 \sin 2\alpha \sqrt{1 - (R^2/f_0^2)}$, $V = 0$ et nous avons vu que les points de la source situés à l'extérieur de cette ellipse ne donnaient pas lieu à des interférences. Dans le cas d'une source circulaire le domaine des points donnant des interférences sera celui limité par un arc de circonférence et un arc d'el-

TABLEAU VIII. $\sin u = 0,18$

α	4°	6°	7°	8°
s'/s	0,528	0,317	0,214	0,143
$\sqrt{s'/s}$	72,5 %	56,4 %	46,2 %	38 %

La surface s' utilisable cor-

respond à une pupille circulaire dont le rayon angulaire est donné par $R' = R \sqrt{s'/s}$; R' serait le diamètre correspondant à une pupille sans diaphragmation

$$\sin i' = \sin i \sqrt{\frac{2 \beta}{\pi} - \frac{\sin 2 \beta}{2 \pi}},$$

avec $\sin 2 \beta = \sin 2 \alpha \cos u \sqrt{4 \sin^2 u - \sin^2 2 \alpha \cos^2 u} / 2 \sin^2 u$.

Etudions maintenant le cas où l'objectif et le condenseur n'ont plus la même ouverture numérique, mais admettons encore provisoirement que la deuxième image pupillaire puisse être assimilée à un cercle. Nous sommes conduite à étudier l'aire commune à deux cercles de diamètres différents. Soit $\sin u_o$ l'ouverture numérique de l'objectif et $\sin u_c$ l'ouverture numérique du condenseur. Le cercle image de la pupille de l'objectif est déplacé d'une quantité fonction de l'angle du coin. Tant que l'angle α n'aura pas atteint une valeur limite α_c il n'y aura pas de diaphragmation et tout se passera comme dans le cas du paragraphe IV.2.2A avec une ouverture égale à celle du condenseur. L'aire commune sera égale à $s' = s_1 + s_2$:

$$\begin{aligned} S_1 &= R_1^2 (\beta - \sin \beta \cos \beta), & S_2 &= R_2^2 (\beta' - \sin \beta' \cos \beta'), \\ \cos \beta &= \frac{\sin^2 u_c - \sin^2 u_o + \sin^2 2 \alpha (1 - \sin^2 u_o)}{2 \sin u_c \sin 2 \alpha \cos u_o}, \\ \cos \beta' &= \frac{-\sin^2 u_c + \sin^2 u_o + \sin^2 2 \alpha \cos^2 u_o}{2 \sin u_o \sin 2 \alpha \cos u_o}. \end{aligned}$$

D'autre part, il n'y aura plus d'interférences lorsque l'angle α est tel que les deux cercles soient tangents extérieurement. Nous trouverons ultérieurement la condition. Donnons l'expression du rapport s'/s dans ces conditions :

$$\frac{s'}{s} = \frac{\beta}{\pi} + \frac{\sin^2 u_o}{\sin^2 u_c} \frac{\beta'}{\pi} - \frac{\sin 2 \beta}{2 \pi} - \frac{\sin^2 u_o \sin 2 \beta'}{\sin^2 u_c 2 \pi}.$$

TABLEAU IX. $\alpha_c = 2^\circ 20'$, $\alpha_1 = 8^\circ 16'$

α	$2^\circ 55'$	$4^\circ 23'$	$5^\circ 52'$
s'/s	0,945	0,64	0,33
$\sqrt{s'/s}$	97 %	80 %	57,5 %

un problème plus délicat à résoudre car nous devons chercher l'aire commune à un cercle et à une ellipse.

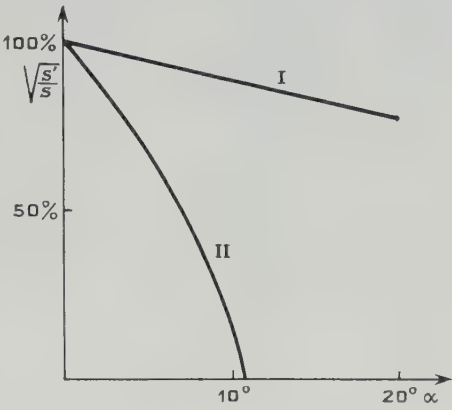


FIG. IV.27. — Courbe I : $n \sin u = 0,7$;
courbe II : $n \sin u = 0,18$.

Les résultats sont montrés sur la figure IV.28 dans le cas particulier $\sin u_o = 0,18$, $\sin u_c = 0,10$ (tableau IX).

Nous constaterons que cette approximation n'est pas suffisante ; aussi nous allons étudier le cas général où l'on doit utiliser la relation des sinus. Nous aurons

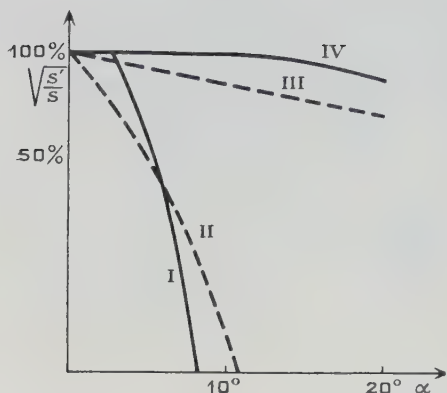


FIG. IV. 28. — Courbe I : $\sin u_o = 0,18$, $\sin u_c = 0,10$; courbe II : $\sin u_o = 0,18$, $\sin u_c = 0,18$; courbe III : $\sin u_o = 0,8$, $\sin u_c = 0,8$; courbe IV : $\sin u_o = 0,8$, $\sin u_c = 0,6$.

Nous devons nous limiter au cas où $u_c + (\alpha/2) < \pi/2$.

Dans tous les cas le point commun à l'ellipse et au cercle est le point d'abscisse $x = -f_o \cos u \operatorname{tg} \alpha$. Calculons l'expression de l'aire commune au cercle et à l'ellipse ; nous trouvons $s' = s_1 + s_2$, $s = \pi f_o^2 \sin^2 u$,

$$s_1 = f_o^2 \cos^2 2\alpha (\varphi \sin^2 u - \cos u \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\sin^2 u - \cos^2 u \operatorname{tg}^2 \alpha}),$$

$$\varphi = \arccos(\operatorname{tg} \alpha \cos 2\alpha / \operatorname{tg} u),$$

$$s_2 = f_o^2 \sin^2 u (\beta - \sin \beta \cos \beta), \quad \beta = \arccos(\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} u).$$

Pour $\alpha = 0$ nous trouvons $\beta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$ d'où le rapport $s'/s = 1$, ce qui est normal.

Donnons les valeurs des angles limites ; dans le cas où l'objectif et le condenseur ont la même ouverture numérique le rapport s'/s ne sera égal à 1 que pour $\alpha = 0$; si $\alpha \neq 0$ le rapport s'/s décroît. D'autre part, la résolution des franges cesse lorsque les deux cercles sont tangents extérieurement donc pour $f_o \sin(2\alpha - u) = f_o \sin u$,

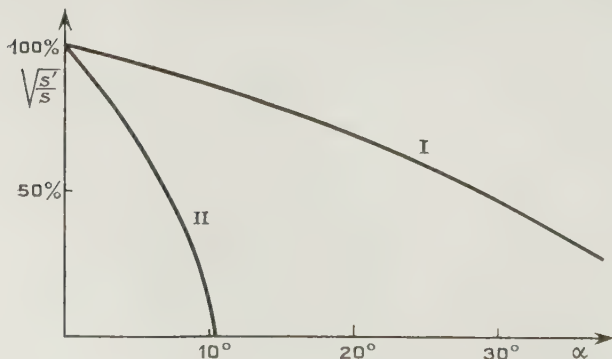


FIG. IV. 29. — Courbe I : $n \sin u = 0,7$;
courbe II : $n \sin u = 0,18$.

En premier lieu *supposons que le condenseur et l'objectif aient la même ouverture numérique*. La source est circulaire et représentée dans le plan focal de l'objectif par un cercle de rayon R_1 . L'image de la pupille de l'objectif est une ellipse dont les demi-axes ont pour longueurs $R_1 = f_o \sin u$, $R_1 \cos 2\alpha$. Le centre du cercle et le centre de l'ellipse sont distants de $f_o \sin 2\alpha \sqrt{1 - (R_1^2/f_o^2)}$. Pour connaître le rapport s'/s donnant le pourcentage de la surface de la pupille utilisable nous devons connaître l'aire commune à un cercle et à une ellipse ; nous devons donc déterminer les points communs à ces deux courbes. Leurs abscisses sont données par

$$x_1 = -f_o \cos u \operatorname{tg} \alpha, \quad x_2 = -f_o \cos u \operatorname{tg} \alpha.$$

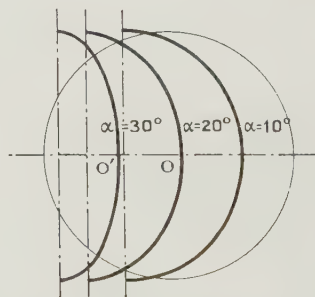


FIG. IV. 30. $\sin u = 0,7$.

donc pour $\alpha > u$. Nous retrouvons les conditions que nous avons données précédemment. Nous n'aurons des franges résolues que si la condition $\alpha \leq u$ est satisfaite.

Nous allons tracer les courbes donnant le rapport $\sqrt{s'/s} = f(\alpha)$ pour deux valeurs de l'ouverture numérique : $\sin u = 0,18$, $\sin u = 0,7$ (fig. IV.29 et tableau X). Pour les ouvertures numériques faibles ($\sin u = 0,18$) l'angle limite α_1 ($\alpha_1 = 10^\circ 22'$) est faible ; son cosinus pourra être assimilé à 1 et les résultats sont identiques à ceux de la figure IV.27.

TABLEAU X. $\sin u = 0,7$, $\alpha_1 = 44^\circ 26'$

α	4°	10°	20°	30°
s'/s	0,90	0,75	0,48	0,22
$\sqrt{s'/s}$	95 %	86,6 %	69 %	47,2 %

Ces résultats peuvent être obtenus graphiquement (fig. IV.30) en traçant les ellipses correspondant à différents angles de coin et en mesurant (par planimétrie) l'aire commune au cercle et à l'ellipse.

Le condenseur et l'objectif n'ont pas la même ouverture numérique. Tant que $2\alpha_c < u_o - u_c$ le phénomène d'interférences sera identique à celui obtenu pour une ouverture égale à $\sin u_c$. Il n'y aura pas de perturbations dues à l'ouverture de l'objectif. Si $2\alpha_c > u_o - u_c$ le rapport s'/s donnera l'importance de la perturbation. Il n'y aura plus de phénomènes d'interférences lorsque $2\alpha_1 > u_o + u_c$. En effet, si $2\alpha > u_o + u_c$ un seul des rayons réfléchis pénètre dans l'objectif, d'où suppression des interférences.

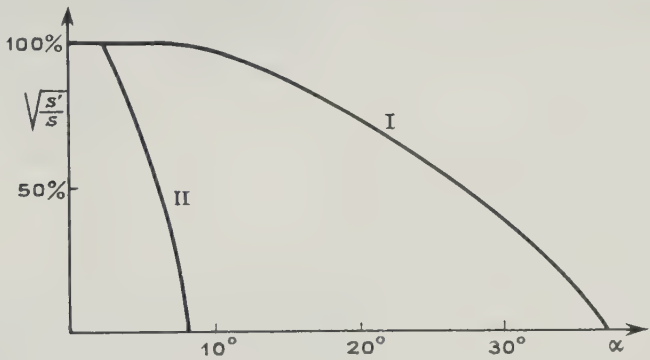


FIG. IV.31. — Courbe I : $\sin u = 0,7$; courbe II : $\sin u = 0,18$.

Nous avons tracé (fig. IV.31) les courbes donnant $\sqrt{s'/s} = f(\alpha)$ dans deux cas particuliers : 1° $\sin u_o = 0,18$, $\sin u_c = 0,10$; nous obtenons pour les angles limites $\alpha_c = 2^\circ 18'$, $\alpha_1 = 8^\circ 4'$; 2° $\sin u_o = 0,7$, $\sin u_c = 0,5$, $\alpha_c = 7^\circ 13'$, $\alpha_1 = 37^\circ 13'$ (tableau XI).

TABLEAU XI

α	10°	20°	30°
s'/s	0,935	0,537	0,154
$\sqrt{s'/s}$	96,7 %	73 %	39 %

C) ETUDE DU DÉPHASAGE ET DE LA VISIBILITÉ DES FRANGES. —

Dans le cas où il y a diaphragme, le domaine d'intégration pour les interférences est la surface commune à deux cercles (aire hachurée de la figure IV.26).

Pour connaître le déphasage et la visibilité des franges on doit calculer les intégrales C et S :

$$C = \int_{s'} \cos 2kD \, ds \quad , \quad S = \int_{s'} \sin 2kD \, ds \quad ,$$

où $D = -\frac{1}{2}d(u^2 + v^2) + (d+z)u\alpha$.

Nous allons procéder à l'intégration graphique. Le domaine d'intégration ainsi obtenu peut être décomposé en une série de fentes rectangulaires parallèles à l'arête du coin. L'effet d'une fente rectangulaire parallèle à l'arête du coin a été étudié précédemment. On connaît le déphasage et la visibilité des franges pour une fente rectangulaire excentrée.

On aura n fentes de largeur $a = (2 \sin u - \sin 2\alpha \cos u)/n$. Le déphasage sera la somme de n déphasages ; les expressions des déphasages ont été données pour la mise au point faite sur le plan de localisation et pour celle faite sur la face supérieure du coin.

Les expressions rigoureuses se mettent sous la forme

$$C = \int_{-\sqrt{1-(s'/2)^4}}^{\sqrt{1-(s'/2)^4}} dv \int_{-\sqrt{1-v^2-(s'/2)^2}}^{+\sqrt{1-v^2-(s'/2)^2}} \cos [-kd(u' + b)^2 + v^2] du'$$

si la mise au point est faite sur la surface de localisation, soit

$$C = \int_{-\sqrt{1-(s'/2)^4}}^{\sqrt{1-(s'/2)^4}} \cos kd v^2 [C(p_1) - C(p_2)] dv - \\ - \int_{-\sqrt{1-(s'/2)^4}}^{\sqrt{1-(s'/2)^4}} [S(p_1) - S(p_2)] \sin kd v^2 dv \quad ,$$

avec $p_1 = \sqrt{\varphi/\pi} (\sqrt{1-v^2} - \frac{1}{2}s' + b)$, $p_2 = \sqrt{\varphi/\pi} (-\sqrt{1-v^2} + \frac{1}{2}s' + b)$ et $s' = \sin 2\alpha \cos u$; de même pour l'intégrale $S = \int \sin (2kD) \, ds$.

Le déphasage est donné par $\Phi : \operatorname{tg} \Phi = S/C$.

3. Source circulaire excentrée. — A) Soit une source circulaire de rayon R . Sa position est donnée par les coordonnées b, b' de son centre (fig. IV.32). Nous allons chercher l'expression de l'intensité du phénomène d'interférences, le déplacement des franges et leur visibilité. Nous avons donné au paragraphe IV.2 l'expression de l'intensité et nous étions amenée à calculer les intégrales

$$C = \int_s \cos 2kD \, ds \quad , \quad S = \int_s \sin 2kD \, ds \quad ,$$

où $D = -\frac{1}{2}d i^2 + (d+z)u\alpha$. Nous avons vu que la visibilité s'exprimait par

$$V' = \sqrt{C^2 + S^2} \quad \text{et que le déphasage des}$$

franges était Φ , où $\operatorname{tg} \Phi = S/C$. Nous calculons les intégrales S et C dans le cas

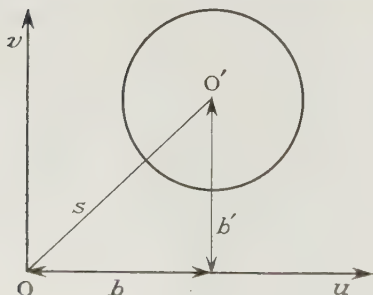


FIG. IV.32.

d'une source excentrée circulaire. En déplaçant par translation les axes de coordonnées de O en O', $u' = u - b$, $v' = v - b'$, avec $s^2 = b^2 + b'^2$, les intégrales s'expriment par

$$C = \int_{r=0}^R \int_0^{2\pi} \cos 2k \left[-\frac{d i^2}{2} + (d+z) u \alpha \right] r dr d\theta = \\ = \iint \cos 2k \left[-\frac{d}{2} r^2 - \frac{d}{2} O O'^2 - b dr \cos \theta - b' dr \sin \theta + \right. \\ \left. + (d+z)(r \cos \theta + b') \alpha \right] r dr d\theta,$$

$$C = \cos 2k D' \iint \cos 2k \left(-\frac{d i^2}{2} + A \cos \theta + B \sin \theta \right) r dr d\theta + \\ + \sin 2k D' \iint \sin 2k \left(-\frac{d i^2}{2} + A \cos \theta + B \sin \theta \right) r dr d\theta,$$

avec $D' = \frac{1}{2} d s^2 - (d+z) b \alpha$. Nous en déduisons

$$C = \cos 2k D' \int_0^R \cos k d r^2 J_0(2k \sqrt{A^2 + B^2} r) r dr - \\ - \sin 2k D' \int_0^R \sin k d r^2 J_0(2k \sqrt{A^2 + B^2} r) r dr,$$

où $A = (d+z)\alpha - b d$, $B = -b' d$. Nous aurons de même pour S,

$$S = -\cos 2k D' \int_0^R \sin k d r^2 J_0(2k \sqrt{A^2 + B^2} r) r dr - \\ - \sin 2k D' \int_0^R \cos k d r^2 J_0(2k \sqrt{A^2 + B^2} r) r dr,$$

d'où la valeur du déphasage

$$\operatorname{tg} \Phi = S/C = -(S' + C' \operatorname{tg} 2k D') / (C' - S' \operatorname{tg} 2k D'),$$

$$C' = \int_0^R \cos k d r^2 J_0(2k \sqrt{A^2 + B^2} r) r dr,$$

$$S' = \int_0^R \sin k d r^2 J_0(2k \sqrt{A^2 + B^2} r) r dr.$$

Nous remarquons que Φ est la somme de deux déphasages Φ_1 , Φ_2 et pourra se mettre sous la forme

$$\operatorname{tg} \Phi = -\operatorname{tg} (\Phi_1 + \Phi_2), \quad \operatorname{tg} \Phi_1 = S'/C', \quad \operatorname{tg} \Phi_2 = \operatorname{tg} 2k D'.$$

Etudions les franges dans le plan de localisation donc pour $z = -d$. Nous trouvons, pour les expressions précédentes, $A = b d$, $B = b' d$, d'après les définitions des fonctions de Lommel et en posant

$$v = 2k d \sqrt{b^2 + b'^2} r, \quad u = 2k d r^2.$$

Nous trouvons des expressions identiques à celles du paragraphe IV.2.2A pour la visibilité et le déphasage.

Etudions le cas particulier où la source est excentrée suivant l'axe Ou donc pour $b' = 0$. Dans ce cas $A = -b d$, $B = 0$. Les expressions de u et v deviennent

$$v = 2 k d b r, \quad u = 2 k d r^2.$$

Le rapport u/v est égal à r/b . Nous allons étudier le cas où le rapport $r/b = 1$; la source est excentrée de telle manière que le point extrême de la source passe par l'origine des coordonnées.

$$U_1 = J_1 - J_3 + J_5 + \dots, \quad U_2 = J_2 - J_4 + \dots,$$

$$\cos(x \cos \varphi) = J_0(x) - 2 J_2(x) \cos 2 \varphi + 2 J_4(x) \cos 4 \varphi,$$

$$\sin(x \cos \varphi) = 2 J_1(x) \cos \varphi - 2 J_3(x) \cos 3 \varphi + 2 J_5(x) \cos 5 \varphi,$$

d'où $U_1 = \frac{1}{2} \sin v$, $U_2 = \frac{1}{2} (J_0 - \cos v)$. Nous obtenons

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = (1 - J_0) / [(1 + J_0) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v], \quad \operatorname{tg} \Phi_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v.$$

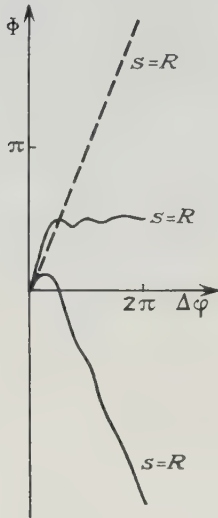


FIG. IV.33.

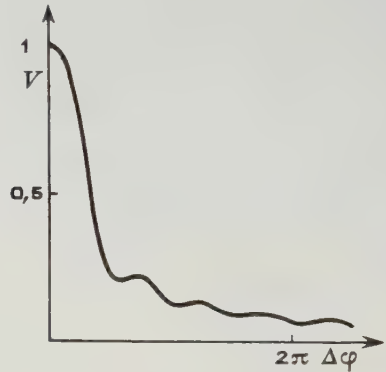


FIG. IV.34. — Cas où $s = R$.

Nous pouvons constater que si $v = (2n + 1)\pi$, $\operatorname{tg} \Phi_1 = 0$, $\Phi_1 = -n\pi$ et si $v = 2n\pi$, $\operatorname{tg} \Phi_1 \rightarrow \infty$, $\Phi_1 = -n\pi/2$.

Nous tracerons la courbe (fig. IV.33) donnant le déphasage en fonction de $\Delta\varphi$. Lorsque $\Delta\varphi = \varphi^2/2 = 0$, par un développement limité nous trouvons $\operatorname{tg} \Phi_1 = 0$ (tableau XII).

TABLEAU XII

$\Delta\varphi$	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
Φ	0	$19^\circ,7$	-59°	$-\pi/2$	$-\pi$	$-3\pi/2$

Etude de la visibilité des franges. Nous avons vu que la visibilité s'exprimait par $V = \sqrt{C^2 + S^2}$ soit, avec les notations retenues et dans le cas où $s = R$, $V = \sqrt{1 + J_0^2 - 2 J_0 \cos v/v}$, d'où la courbe (fig. IV.34) représentant les variations de la visibilité en fonction de $\Delta\varphi$ (tableau XIII).

TABLEAU XIII

$\Delta\varphi$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π	$9\pi/4$	$5\pi/2$
V	1	0,71	0,22	0,22	0,12	0,13	0,09	0,09	0,067	0,072	0,055

Nous ne pouvons guère aller plus loin car il nous faudrait calculer les valeurs de J_0 par des développements en série.

Considérons le cas où la mise au point est faite sur la face supérieure du coin soit pour $z = 0$. Les expressions deviennent $A = d\alpha - bd$, $B = -b'd$ soit, d'après les définitions de Lommel et en posant

$$v = 2k\sqrt{A^2 + B^2}r, \quad u = 2kdr^2,$$

nous obtenons des résultats identiques à ceux du paragraphe IV.2.2A. Les expressions donnant la visibilité $V = \sqrt{C^2 + S^2}$ sont les mêmes, mais le facteur u/v intervenant dans les expressions de C et S n'est pas le même.

Supposons que la source soit excentrée suivant l'axe Ou , soit $b' = 0$. Les expressions se simplifient

$$D' = \frac{1}{2}ds^2 - db\alpha, \quad A = d(\alpha - b), \quad B = 0.$$

Le rapport v/u est égal à $(b - \alpha)/r$. Considérons le cas où $v/u = 1$ soit $b - \alpha = R$ donc, en première approximation, $s = R$; la source est excentrée de telle manière que le point extrême passe par l'origine des coordonnées; nous retrouvons le cas de la mise au point faite sur la surface de localisation. En fait pour avoir $v/u = 1$ il faudra prendre un excentrement légèrement plus grand.

Si la source est excentrée suivant l'axe Ob , soit $b = 0$, nous pouvons montrer que pour $b' = R$ nous obtenons des résultats identiques.

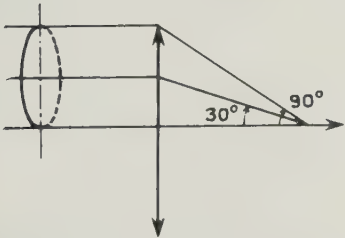


FIG. IV.35.

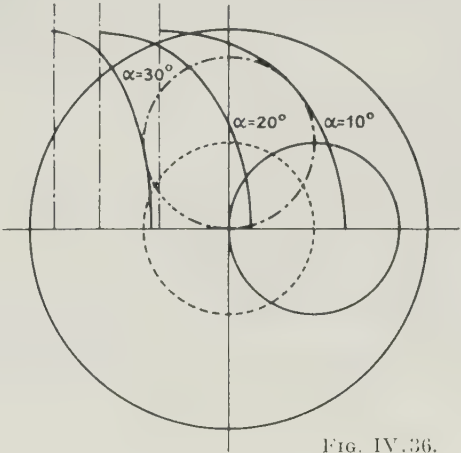


FIG. IV.36.

B) CAS D'UNE SOURCE CIRCULAIRE EXCENTRÉE AVEC DIAPHRAGMATION. — Envisageons toujours le cas où $s = R$ et cherchons les angles limites lorsque les deux images de la source ne sont pas entièrement admises dans la pupille de l'objectif.

Il n'y aura aucun effet produit par la pupille de l'objectif tant que l'angle α n'a pas atteint la valeur $\sin(u_0 - 2\alpha) > 2\sin u_c$, si u_0 est l'ouverture de l'objectif et u_c celle du condenseur. Cherchons donc la valeur de l'angle α_c . Il nous suffit

pour cela d'écrire que le cercle et l'ellipse sont tangents intérieurement ; d'où en posant $t = \operatorname{tg} \alpha$ l'équation

$$-t^2 (\sin u_0 + 2 \sin u_c) - 2t \cos u_0 + \sin u_0 - 2 \sin u_c = 0.$$

D'après cette équation nous constatons que nous n'aurons pas de solution si $\sin u_c > 1/2$; l'excentrement

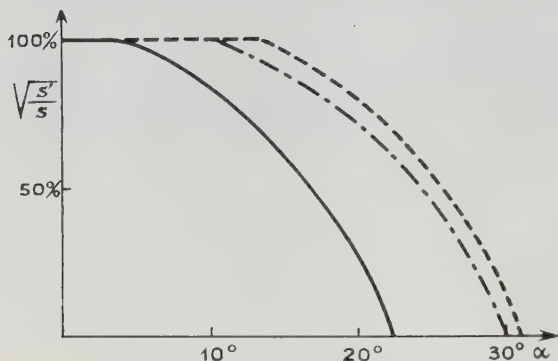


FIG. IV.37. — En tirets, source centrée ;
en trait plein, source excentrée $d = 0$;
en trait mixte, source excentrée $b = 0$.

limite pour une source tangente intérieurement correspond à une ouverture de 30° (fig. IV.35).

Pour avoir les valeurs du rapport $\sqrt{s'/s}$ nous opérerons graphiquement (fig. IV.36). La courbe (fig. IV.37) donnant la variation du rapport $\sqrt{s'/s}$ en fonction de α a été tracée dans le cas où $\sin u_c = 0,3$, $\sin u_0 = 0,7$. Dans ce cas particulier, tant que l'angle α n'aura pas atteint la valeur $\alpha_c = 3^\circ 47'$, le rapport $\sqrt{s'/s}$ reste égal à

1, c'est-à-dire que nous obtiendrons la valeur du déplacement, de la visibilité des franges en appliquant les résultats du paragraphe IV.2.3A. Dans le cas de l'excentrement choisi la valeur de l'angle limite (suivant l'orientation du coin) pour lequel nous n'aurons plus de résolution se produit pour $\alpha_1 = u_0/2$

TABLEAU XIV

Source excentrée $s = R$, $\alpha_c = 3^\circ 47'$, $\alpha_1 = 22^\circ 13'$ Source centrée, $\alpha_c = 13^\circ 29'$, $\alpha_1 = 30^\circ 57'$

α	α_c	10°	20°	α_1
s'/s	1	0,693	0,067	0
$\sqrt{s'/s}$	1	83,3 %	25,9 %	0

α	α_c	20°	α_1
s'/s	1	0,639	0
$\sqrt{s'/s}$	1	79,9 %	0

ou $\alpha_1 = u$ (tableau XIV). Dans le cas étudié nous constatons que les angles limites sont plus faibles pour une source excentrée que pour une source centrée.

(A suivre.)

Manuscrit reçu le 15 mai 1963.

CONSIDÉRATIONS SUR L'OBSERVATION DES FRANGES D'INTERFÉRENCES EN MICROSCOPIE *

(suite et fin)

par M^{lle} Monique GUILLARD

V. Possibilité d'amélioration du contraste des images

1. Calcul du contraste des franges. — Nous allons calculer le contraste des franges d'un phénomène d'interférences à deux ondes. Le phénomène d'interférences à deux ondes sera considéré comme étant l'approximation la plus valable d'un phénomène à ondes multiples. Soit deux surfaces semi-réfléchissantes S_1 et S_2 (fig. V.1), soit n_1 l'indice intermédiaire, n_0 et n_2 les indices des milieux extrêmes. Ecrivons les amplitudes des rayons réfléchis :

rayon 1, $\mathcal{A}_1 = r_1$, avec $r_1 = (n_0 - n_1)/(n_0 + n_1)$;

rayon 2, $\mathcal{A}_2 = t_1 r_2 t'_1 \exp(-i 2 \varphi)$, où $t_1 = 1 + r_1$, $t'_1 = 1 - r_1$;

de même pour les autres rayons ; d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= r_1 + \frac{t_1 t'_1 r_2}{r_1 r_2 + \exp(i 2 \varphi)} \\ &= \frac{r_1 + r_2 \exp(-i 2 \varphi)}{1 + r_1 r_2 \exp(-i 2 \varphi)} \simeq r_1 + r_2 \exp(-i 2 \varphi) + \dots \end{aligned}$$

Lorsqu'on peut négliger $r_1 r_2^2$ on obtient $\mathcal{A} = r_1 + r_2 \exp(-i 2 \varphi)$. Remarquons que cette expression n'est pas identique à celle qui serait obtenue pour deux ondes car la deuxième onde serait affectée par le passage du deuxième dioptré ; l'intensité est $I = \mathcal{A} \mathcal{A}^*$.

1. Couche non absorbante sur support non absorbant. — Dans le cas d'une couche et d'un support non absorbants les indices sont réels, d'où

$$r_1 = (n_0 - n_1)/(n_0 + n_1) , \quad r_2 = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2) ;$$

r_1 et r_2 sont donc réels, d'où

$$I = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos 2 \varphi .$$

Le contraste $\gamma = (I_{\max} - I_{\min})/I_{\max} = 4 r_1 r_2 / (r_1 + r_2)^2$, soit, en fonction des indices,

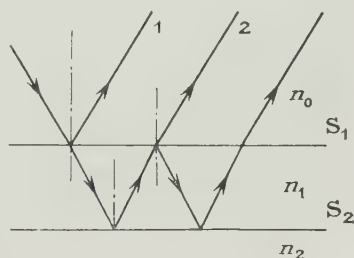


FIG. V.1.

* Voir le début de ce mémoire dans les numéros de septembre 1963, pages 463 à 483, de janvier 1964, pages 21 à 32 et de février 1964, pages 64 à 88.

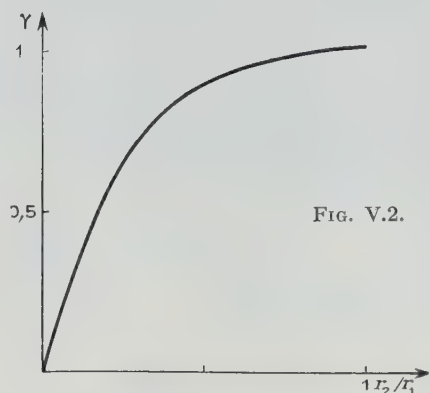


FIG. V.2.

$$\gamma = (n_0^2 - n_1^2) (n_1^2 - n_2^2) / n_1^2 (n_0 - n_2)^2.$$

La figure V.2 montre la variation du contraste en fonction du rapport r_2/r_1 . On constate que le déséquilibre r_2/r_1 n'affecte que très lentement le contraste. Pour $r_2/r_1 = 0,33$, ce qui correspond au rapport 1/10 en intensité, le contraste a encore une très bonne valeur : 75 %.

2. *Couche non absorbante sur support absorbant* (support métallique). — Dans le cas d'un support absorbant, l'indice n_2 du support devient complexe,

$\bar{n}_2 = n_2 - i K_2$. Par conséquent, l'amplitude r_2 est une quantité complexe que l'on pourra mettre sous la forme

$$r_2 = (n_1 - n_2 + i K_2) / (n_1 + n_2 - i K_2) = \rho_2 \exp(i \theta_2),$$

avec

$$|\rho_2|^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2 + K_2^2}{(n_1 + n_2)^2 + K_2^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2 K_2 n_1}{n_1^2 - n_2^2 - K_2^2},$$

soit

$$\mathcal{A} = r_1 + r_2 \exp(-i 2 \varphi) = r_1 + \rho_2 \exp[i(-2 \varphi + \theta_2)].$$

Dans ce cas, l'expression du contraste est

$$\gamma = \frac{4 r_1 \rho_2}{(r_1 + \rho_2)^2}, \quad |\rho_2|^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2 + K_2^2}{(n_1 + n_2)^2 + K_2^2}.$$

Dans le cas de certains métaux le facteur K_2 joue un rôle prépondérant dans le terme ρ_2 .

3. *Couche absorbante sur support absorbant* (support métallique). — Ce cas sera vraisemblablement le cas le plus usuel. Les indices de la couche et du support seront des indices complexes

$$\bar{n}_1 = n_1 - i K_1, \quad \bar{n}_2 = n_2 - i K_2.$$

Les deux amplitudes r_1 et r_2 sont des quantités complexes :

$$r_1 = \frac{n_0 - \bar{n}_1}{n_0 + \bar{n}_1} = \rho_1 \exp(i \theta_1), \quad r_2 = \frac{\bar{n}_1 - \bar{n}_2}{n_1 + \bar{n}_2} = \rho_2 \exp(i \theta_2),$$

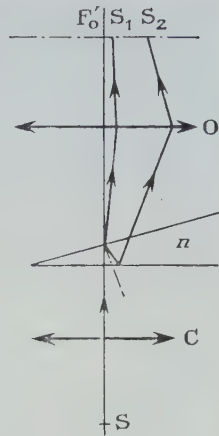
avec

$$|\rho_1|^2 = \frac{(n_0 - n_1)^2 + K_1^2}{(n_0 + n_1)^2 + K_1^2}, \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2 K_1 n_0}{n_0^2 - n_1^2 - K_1^2},$$

$$|\rho_2|^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2 + (K_1 - K_2)^2}{(n_1 + n_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2 (n_1 K_2 - n_2 K_1)}{(n_1^2 - n_2^2) - (K_2^2 - K_1^2)}.$$

Dans ce cas, l'expression du contraste est $\gamma = 4 \rho_1 \rho_2 / (\rho_1 + \rho_2)^2$. Lorsque le coefficient d'absorption est faible (cas des liquides ou du verre coloré) le facteur de réflexion sera, contrairement au cas précédent, déterminé par la valeur réelle de l'indice. Si K_1 est trop grand, on ne pourra plus observer de franges.

FIG. V.3. — O, objectif ; C, condenseur.



2. Possibilités d'amélioration du contraste. — Nous avons donné les expressions du contraste des franges dans différents cas et nous remarquons que le contraste dépend essentiellement du rapport r_2/r_1 ou ρ_2/ρ_1 , soit du rapport des amplitudes des deux rayons. Le contraste sera d'autant meilleur que le rapport r_2/r_1 sera voisin de 1, d'où la possibilité d'agir sur le rapport r_2/r_1 .

1 Emploi d'un écran absorbant. — Les amplitudes des deux faisceaux sont inégales, d'où l'idée, pour améliorer le contraste, d'absorber l'un des faisceaux de façon à rendre le rapport r_2/r_1 le plus voisin de 1.

Nous avons montré (chap. II) que, dans le cas d'un coin, à une source ponctuelle placée dans le plan du condenseur correspondaient deux images ou sources secondaires ; on a donné les positions de ces images dans le cas général. Envisageons le cas d'un coin d'indice n observé en lumière transmise (fig. V.3).

Dans le plan focal du condenseur est une source ponctuelle S ; dans le plan focal de l'objectif on observe deux images S_1 et S_2 . L'image S_1 provient du faisceau directement transmis ayant une intensité a_1^2 , l'image S_2 provient de rayons ayant subi des réflexions et ont une intensité a_2^2 nettement inférieure à a_1^2 . Dans ce cas, il suffira de placer en S_1 un écran absorbant qui rendra égales les intensités des deux faisceaux. La transmission T de la lame sera déterminée par $T R_1 = R_2$, où $R_1 = a_1^2 r_1^2$ et $R_2 = a_2^2$.

Cette expérience a été faite dans les conditions suivantes : nous avons observé les franges d'égale épaisseur d'une pellicule de vernis décollée ; l'observation était faite en lumière transmise avec un objectif 10 de façon à avoir accès au plan focal. Sans lame absorbante les franges n'étaient pratiquement pas visibles (fig. V.4). La lame absorbante est constituée par une couche de chrome déposée par évaporation sous vide, de 1 mm de diamètre ; la figure V.5 nous montre le même objet mais observé après introduction de l'écran absorbant dans le plan focal de l'objectif. La comparaison des deux photographies nous permet de conclure.

Nous avons pu mettre en évidence l'existence dans le plan focal de l'objectif de deux « images pupillaires ». La photographie (fig. V.6) du plan focal de l'objectif nous montre la position de ces deux images.

Nous avons donné la position des images dans le cas d'un coin ; suivant la position de l'arête du coin et suivant la direction de la ligne de plus grande pente on connaîtra les positions respectives des deux images. L'observation de la position de ces deux images permet réciproquement de déduire le sens de l'angle, soit dans le cas d'un profil perturbé de connaître les changements de pente. L'emploi de l'écran circulaire est préférable lorsque la direction des franges est quelconque. Par contre, la meilleure sensibilité est obtenue avec un écran rectiligne qui permettra d'agir sur S_1 même dans le cas d'un angle très faible ; en outre, cet écran est monté sur un dispositif permettant de l'orienter dans différents azimuts, ce qui



FIG. V.4.

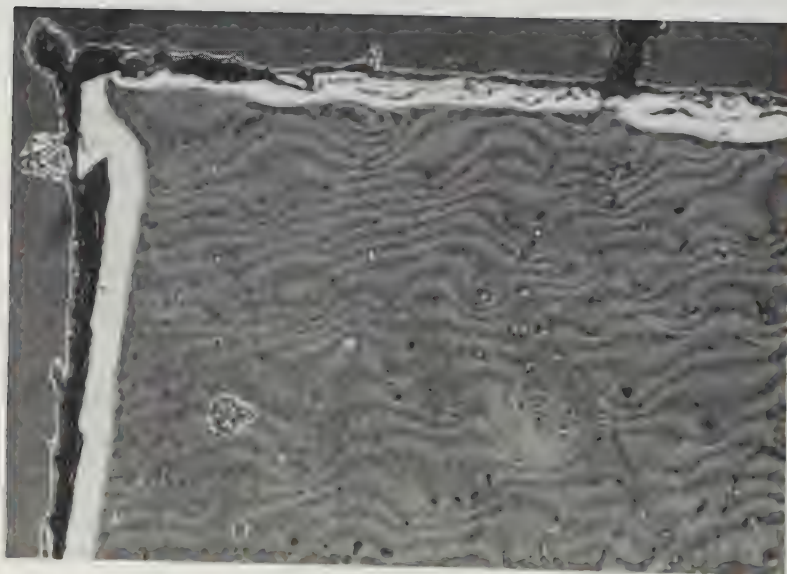


FIG. V.5.

permet de lever l'incertitude sur la pente du coin : en effet, l'intensité est identique pour des angles $\pm \alpha$.

Supposons que l'objet examiné soit un coin et éclairons-le au moyen d'une fente ; dans ce cas nous pouvons considérer que l'écran absorbant pourra être un bord de plage absorbant l'image directe.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'écran introduit dans le plan focal de l'objectif était absorbant et n'introduisait aucun déphasage. Envisageons par exemple

le cas d'une lame de phase ; la lame de phase est à la fois absorbante et déphasante ; la différence de phase introduite est égale à $\pi/2$. Après l'objet l'onde incidente Σ donne lieu à deux ondes

$$\Sigma_1 = 1, \quad \Sigma_2 = r \exp[i k d(x)],$$

d'où l'amplitude résultante

$$\mathcal{A} = 1 + r \exp[i \Phi(x)], \quad \Phi(x) = k d(x).$$

L'intensité sans lame de phase s'exprime par

$$(8) \quad I = \mathcal{A} \mathcal{A}^* = 1 + r^2 + 2 r \cos \Phi,$$

soit un contraste $\gamma = 4 r / (1 + r)^2$. Interposons maintenant une lame de phase non absorbante ; elle introduit seulement un déphasage. L'amplitude s'écrit alors $\mathcal{A} = 1 + r \exp[i \Phi(x)]$; d'où l'expression de l'intensité

$$(9) \quad I = 1 + r^2 + 2 r \sin \Phi.$$

De la comparaison des équations (8) et (9) nous pouvons conclure qu'une lame déphasante entraîne un déplacement du système de franges ; les franges se produisent pour $\Phi(x) = N \pi/2$. Mais nous pouvons constater que le contraste des franges reste le même.

Supposons maintenant une lame absorbante déphasante ; l'expression de l'intensité est

$$I = t^2 + r^2 + 2 t r \sin \Phi, \quad t = \sqrt{T},$$

ce qui donne pour le contraste

$$\gamma' = 4 \frac{r}{t} \left/ \left(1 + \frac{r}{t} \right)^2 \right.$$



FIG. V.6.

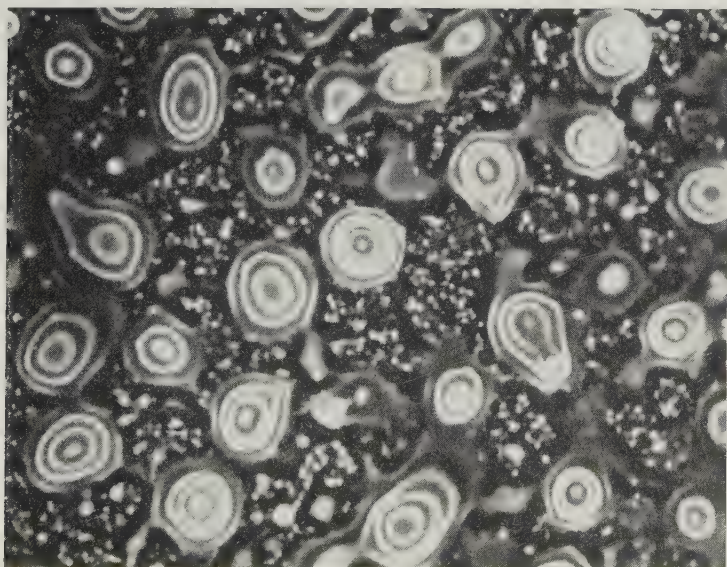


FIG. V.7.

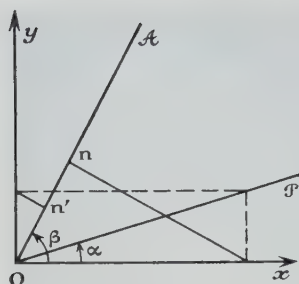


FIG. V.8.

L'absorption revient à remplacer le facteur r par r/t , t étant le facteur de transmission en amplitude de la lame absorbante. Le contraste sera maximum pour $r = t$.

La lame de phase ne peut améliorer le contraste des franges que si elle est absorbante donc agit par « contraste d'amplitude » ; le déphasage de la lame de phase produit un déplacement en bloc du système de franges. L'expérience en contraste de phase a été faite et nous pouvons voir les résultats sur la figure V.7.

2. *Etude de l'effet produit par un prisme de Babinet.* — Considérons une lame cristalline placée entre un polariseur et un analyseur (fig. V.8) et calculons l'intensité de la lumière transmise. La vibration transmise est la résultante de deux vibrations parallèles On et On' présentant un déphasage :

$$\mathcal{A}_1 = \cos \alpha \cos \beta, \quad \mathcal{A}_2 = \sin \alpha \sin \beta \exp(i\varphi),$$

d'où

$$I = \cos^2_1(\beta - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2(\beta + \alpha) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

L'intensité varie suivant les positions relatives du polariseur et de l'analyseur. Supposons la lame placée entre nicols croisés ; on a $\beta = \alpha + (\pi/2)$, soit

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \cos(\beta + \alpha) = \mathcal{A}_2.$$

Le wollaston se compose de deux coins de quartz d'angles égaux mais d'axes croisés. Placé entre deux nicols croisés et orientés à $\pm 45^\circ$ de l'un des axes du babinet, le babinet donne d'une onde incidente Σ deux ondes Σ_1 et Σ_2 dont la séparation angulaire est $\varepsilon = 2(n_e - n_o) \tan \theta$, où θ est l'angle du babinet. Il donne d'un objet A deux images A_1 et A_2 identiques mais décalées de $a = fg\varepsilon$, si g est le grandissement de l'objectif et f sa longueur focale.

Etudions l'intensité transmise.

A) Supposons, en premier lieu, que l'on opère *entre polariseurs croisés*, les amplitudes des ondes Σ_1 et Σ_2 sont égales ; prenons-les égales à 1 :

$$\mathcal{A}_1 = 1, \quad \mathcal{A}_2 = -\exp[i\varphi(u)], \quad \varphi(u) = K\varepsilon u,$$

d'où l'intensité

$$I = I_0(2 - 2 \cos \varphi) = 4 I_0 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi, \quad I_0 = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$$

et le déphasage $\tan \psi = -\sin \varphi / (1 - \cos \varphi)$; ψ est le déphasage résultant des deux ondes par rapport à la première.

Etudions les variations de ψ et I en fonction de φ .

La figure V.9 donne la variation de l'intensité en fonction de φ . Pour $\varphi = 0$ l'intensité est nulle entre nicols croisés. Sur le même graphique on a tracé l'amplitude en fonction de φ .

Etude du déphasage.

$$\tan \psi = -\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = -\cotg \frac{\varphi}{2},$$

On peut étudier la fonction ψ au voisinage de 0, 2π , $2N\pi$. On peut voir immédiatement en faisant un développement que pour φ tendant vers 0 par valeurs

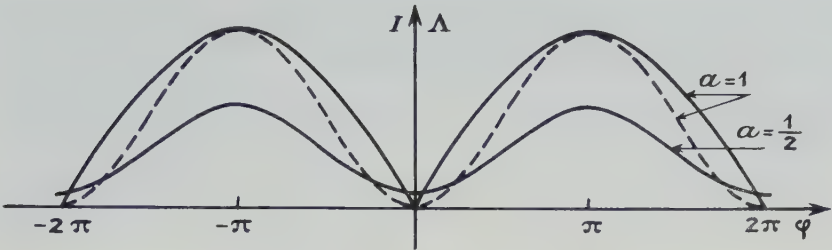


FIG. V.9. — En traits pleins, I ; en tirets, Λ .

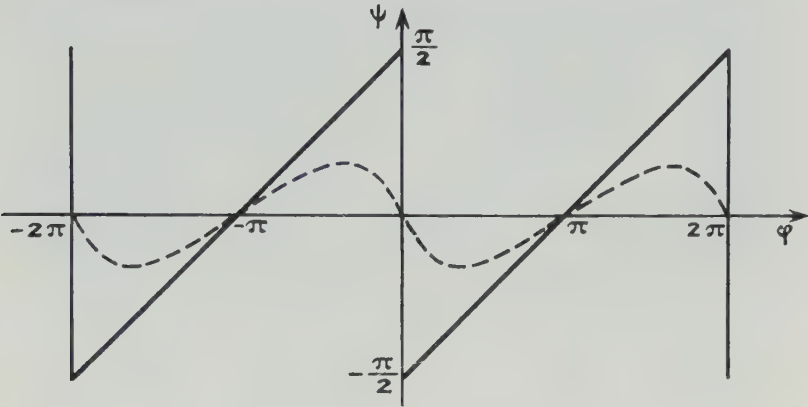


FIG. V.10. — En traits pleins, $a = 1$; en tirets, $a = 1/2$.

positives, ψ tend vers $-\pi/2$ et pour φ tendant vers 0 par valeurs négatives ψ tend vers $+\pi/2$. Il en sera de même au voisinage de $2\pi, 2N\pi$.

Pour $\varphi = (2N + 1)\pi$, le déphasage ψ est nul ; d'où la représentation du déphasage en fonction de φ (fig. V.10).

B) Supposons que les polariseurs soient décroisés. Dans ce cas les deux ondes n'auront plus la même amplitude et l'on pourra écrire

$$\mathcal{A}_1 = 1 \quad , \quad \mathcal{A}_2 = -a \exp[i\varphi(u)] \quad , \quad a = \sin \alpha \sin \beta / \cos \alpha \cos \beta \quad ,$$

d'où les expressions de l'intensité et du déphasage :

$$I = I_0 (1 + a^2 - 2a \cos \varphi) \quad , \quad \operatorname{tg} \psi = -a \sin \varphi / (1 - a \cos \varphi) \quad .$$

Etudions d'abord la variation de l'intensité en fonction du déphasage ; lorsque $\varphi = 0$ nous trouvons $I = (1 - a)^2$ donc l'intensité pour $\varphi = 0$ n'est plus nulle : la frange noire ne l'est plus. La courbe (fig. V.9) donnant les variations de l'intensité en fonction de φ a été tracée dans le cas où $a = 1/2$.

Etude du déphasage. Le déphasage ψ est nul pour $\varphi = N\pi$. Nous allons donner les valeurs de φ qui rendent ψ minimum ou maximum. On trouve $\varphi = \arccos a$, d'où une série de minima et de maxima.

Si $2N\pi < \varphi < 2(N + 1)\pi$, la valeur du minimum est donnée par

$$\operatorname{tg} \psi_{\min} = -a \sqrt{1 - a^2} / (1 - a^2) \quad .$$

Si $(2p + 1)\pi < \varphi < 2(p + 1)\pi$ la courbe présente un maximum avec

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = a \sqrt{1 - a^2} / (1 - a^2) \quad .$$

On a tracé (fig. V.10) la courbe $\psi = \arctg[-a \sin \varphi / (1 - a \cos \varphi)]$ dans le cas où $a = 1/2$. On peut remarquer sur le graphique que le déphasage est nul pour $\varphi = 0, \pi, \dots$; nous allons en déduire une application.

3. *Interposition d'un wollaston en vue d'améliorer le contraste.* — Le wollaston donne d'une onde incidente deux ondes présentant une différence de phase $\varphi = k \varepsilon x$. Après traversée de l'analyseur on obtient un déphasage ψ (entre deux rayons, l'un passant à l'origine, l'autre au point x). On constate sur le graphique que si $\varphi = 0$, soit au point A, l'intensité est nulle. Au point A' ($\varphi = \pi$) l'intensité est maximum et égale à $(1 + a)^2$ si les polariseurs sont croisés.

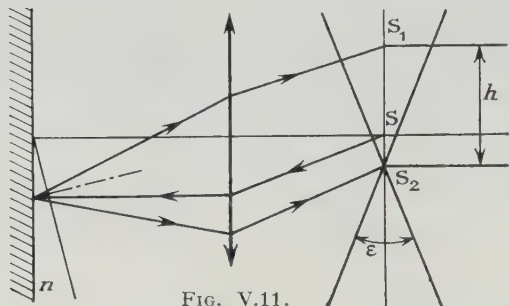


FIG. V.11.

Supposons le cas d'un wollaston entre polariseurs croisés ($a = 1$) et considérons le cas du coin (fig. V.11). Le coin, en lumière réfléchie, donne de la source deux images pupillaires S_1, S_2 décalées latéralement. Supposons que l'on place la frange noire du wollaston sur l'image principale (en A) et que l'image secondaire S_2 se trouve en A'. On remarque que l'image principale S_1 est supprimée

et que l'intensité de l'image S_2 est maximum sans que l'on ait introduit de déphasage.

Tournons l'analyseur; dans ce cas $a \neq 1$ et l'intensité en A n'est plus nulle; elle est égale à $(1 - a)^2$. On aura donc diminué l'intensité de l'image principale et, par conséquent, on aura amélioré le contraste des franges, sans introduire de déphasage (fig. V.12).

Pour augmenter le contraste des franges d'interférences, il faudra donc mettre le wollaston entre nicols croisés, le déplacer latéralement de façon à amener la frange noire sur l'image principale; ensuite on fera tourner l'analyseur de façon à augmenter le contraste des franges.

Calcul de l'angle du babinet. Le babinet donne des franges localisées sur la surface de collage des deux prismes en quartz. Le prisme devra donc être placé dans le plan focal de l'objectif; ceci ne sera possible qu'avec des objectifs ayant un plan focal accessible; dans le cas contraire, il faudra utiliser un dispositif donnant des franges localisées à l'extérieur du prisme [14].

Soit un coin (fig. V.11) d'indice n . De la source S on obtient dans le plan focal de l'objectif deux images S_1 et S_2 . On amènera la frange noire sur S_1 ; la source S_2 sera placée au point A' où la phase φ est égale à π , le déphasage est nul et l'intensité est maximum; soit h la distance $S_1 S_2$ on doit écrire $h \varepsilon = \lambda/2$. D'autre part, l'angle de déviation dû au coin, pour un rayon dans le plan de section principale, est $2 n \alpha$, soit $h = 2 n \alpha f$, si f est la longueur focale de l'objectif, d'où le rapport entre l'angle du coin et de dédoublement du babinet $\varepsilon = \lambda/4 n \alpha f$. Or l'angle θ du babinet est lié au dédoublement ε par la relation $\varepsilon = 2 (n_e - n_o) \tan \theta$, d'où l'angle du babinet en fonction de l'angle du coin :

$$\operatorname{tg} \theta = \lambda / 8 n \alpha f (n_e - n_o),$$

soit, si $\lambda = 0,55 \mu$, pour un objectif de 23 mm de longueur focale et un indice 1,5 (objectif $7\times$ Nacet), $\operatorname{tg} \theta = 2,18 \times 10^{-4} / \alpha$. Plus l'angle du coin est grand, plus l'angle du babinet est faible.

Cette position n'entraîne pas de déphasage et donne le contraste maximum et la perte de lumière minimum ; mais l'expérience montre que l'on obtient quand même une amélioration du contraste en prenant un ϵ légèrement différent ; on introduit un petit déphasage.

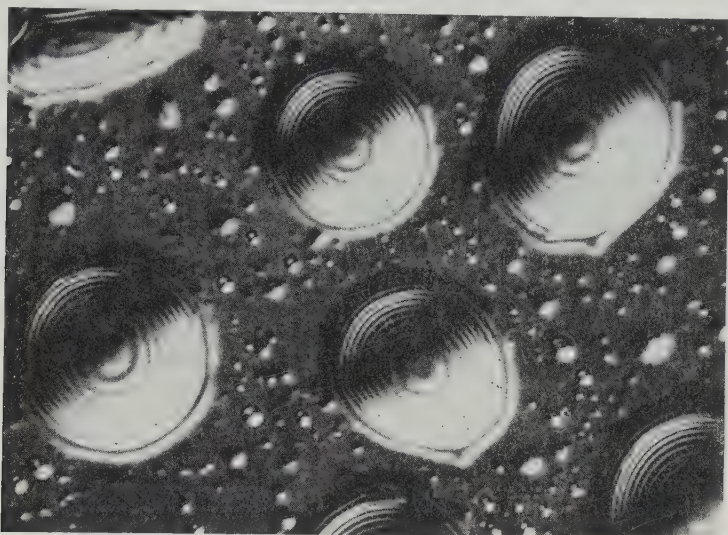


FIG. V.12.

VI. Applications des interférences lumineuses à la volumétrie et la réfractométrie interférentielles

Nous nous proposons comme but la détermination de volumes compris entre deux surfaces réfléchissantes, le volume délimité par ces deux surfaces étant constitué par des liquides transparents.

Considérons un phénomène d'interférences à deux ondes ; on pourra l'observer soit en lumière transmise, soit en lumière réfléchie. Envoyons un faisceau de lumière monochromatique sur un corps transparent d'épaisseur $d(x, y)$ et d'indice homogène n . La différence de chemin optique entre les deux ondes réfléchies sur les deux faces du corps sera égale à $\Delta(x, y) = 2n d(x, y)$. Le corps observé est déposé sur un support réfléchissant sous forme de gouttes plus ou moins parfaites. La fonction $d(x, y)$ représente la topographie de la surface de la goutte d'où

$$d(x, y) = \frac{1}{2n} \Delta(x, y).$$

Le volume d'un parallélépipède de côtés x et y est égal à

$$V = \int_0^x \int_0^y d(x, y) dx dy .$$

Les méthodes interférentielles permettent la mesure d'épaisseur avec une erreur inférieure à un dixième de frange. En admettant la possibilité de mesurer des diamètres de l'ordre du micron, on pourra mesurer des volumes de l'ordre du micron cube.

A partir de ces données, nous nous sommes attachée en particulier à la détermination de volumes observables au microscope. Pour fixer les idées, avec un grossissement de 500 et après agrandissement photographique, un volume de $3 \mu^3$ est représenté sur le tirage par une surface de $1,5 \text{ mm}^2$ donc nettement visible.

1. Etude d'une goutte liquide. — 1. Equation de la goutte. — Nous allons rappeler quelques calculs sur la théorie des gouttes ; mais nous verrons par la suite que cela n'est pas utile car la forme des gouttes que nous étudierons sera toujours très simple.

Supposons une goutte de révolution (fig. VI.1) autour d'un axe Oz, l'origine O étant prise au sommet de la goutte. Nous tiendrons compte de la tension superficielle et de l'angle de raccordement [12].

Soit R, R' les deux rayons de courbure principaux de la surface, p la pression et T la tension superficielle. La loi de Laplace s'écrit

$$(10) \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{p}{T} .$$

Soit σ la densité du liquide. L'équation (10) devient

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\sin \Phi}{x} = \frac{C + g \sigma z}{T} .$$

Si b est le rayon de courbure au sommet l'équation différentielle de la surface est :

$$(11) \quad \frac{1}{\rho} + \frac{\sin \Phi}{x} = \frac{2}{b} + \frac{g \sigma}{T} z .$$

Pour intégrer cette équation différentielle nous prendrons Φ comme variable indépendante,

$$dx/d\Phi = \rho \cos \Phi, \quad dz/d\Phi = \rho \sin \Phi$$

et nous poserons $\rho = 1 + b_2 \Phi^2 + b_4 \Phi^4 + \dots$, où $b_2, b_4, \dots$ sont des constantes à déterminer. En développant $dx/d\Phi$ et en intégrant nous trouvons

$$x = \left(\Phi - \frac{\Phi^3}{6} + \frac{\Phi^5}{120} + \dots \right) + b_2 \left(\frac{\Phi^3}{3} - \frac{\Phi^5}{10} + \dots \right) + b_4 \left(\frac{\Phi^5}{5} - \frac{\Phi^7}{14} + \dots \right),$$

$$z = \left(\frac{\Phi^2}{2} - \frac{\Phi^4}{24} + \frac{\Phi^6}{120} + \dots \right) + b_2 \left(\frac{\Phi^4}{4} - \frac{\Phi^6}{36} + \frac{\Phi^8}{960} + \dots \right) .$$

En calculant, d'après ces expressions, $1/\rho, (\sin \Phi)/x$ et en portant dans l'équation (11) nous obtenons les coefficients $b_2, b_4, \dots$

$$b_2 = -\frac{3}{8} \frac{g \sigma b^2}{T}, \quad b_4 = \frac{1}{48} \frac{g \sigma b^2}{T} + \frac{5}{24} \left(\frac{g \sigma b^2}{T} \right)^2 ,$$

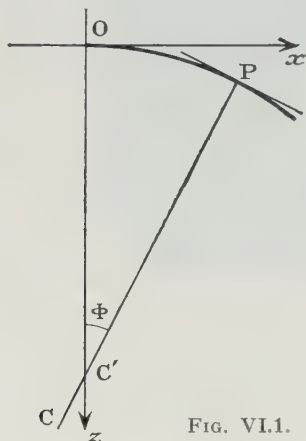


FIG. VI.1.

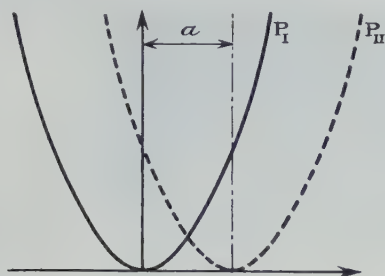


FIG. VI.2.

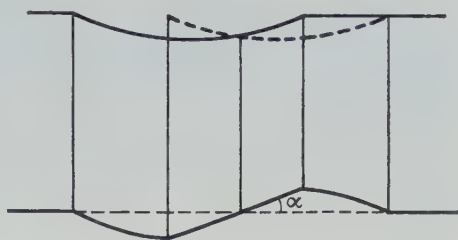


FIG. VI.3.

Pour une valeur donnée de $\beta = g \sigma b^2/T$ nous pouvons tracer la forme de la goutte point par point. Il nous suffira de mesurer le rayon de courbure au sommet de la goutte $\rho = b$. Connaissant ρ et l'angle Φ de raccordement nous pourrions connaître la forme de la goutte par les tables de Bashforth donnant les valeurs de x/b et z/b pour ρ et Φ donnés.

2. *Calcul du volume d'une goutte.* — Dans les mêmes conditions que précédemment nous pourrions écrire $dV = \pi x^2 dz$, soit, en remplaçant x et dz par leurs valeurs respectives et après intégration,

$$V = \frac{\pi b^2 x^2}{\beta} \left(\frac{2}{b} - \frac{2 \sin \Phi}{x} + \frac{\beta z}{b^2} \right),$$

avec $\beta = g \sigma b^2/T$.

Nous constatons que dans l'expression du volume intervient le rayon de courbure au sommet de la goutte. Nous allons donner ici une méthode permettant de connaître la valeur du rayon de courbure au sommet d'une goutte. Nous pourrions assimiler le sommet d'une goutte à un paraboloïde de révolution. Au moyen d'un interféromètre différentiel nous dédoublons la surface d'onde d'une quantité a (cette quantité a n'est pas nécessairement faible par rapport à la largeur de la parabole) et nous allons évaluer l'interférogramme en utilisant le profil différentiel $\Delta(x)$. Soit, sur la figure VI.2, P_I la parabole et P_{II} la même parabole mais décalée de a . A l'aide de l'interféromètre nous formons $\Delta(x) = h(x) - h(x - a)$. $\Delta(x)$ est le profil différentiel associé à une onde de référence (fictive) qui épouse le fond plan de la deuxième onde objet ; ce profil différentiel est comparé à une onde plane prise comme onde de référence. Dans le cas d'un paraboloïde le profil différentiel associé est un plan (fig. VI.3) de pente a/p , si p est le paramètre de la parabole. Les interférences sont celles d'une onde plane inclinée d'un angle α par rapport à l'onde de référence ; on observe des franges équidistantes et dont l'interfrange est $i = \lambda/2 (n - 1) \alpha$.

Le paramètre d'une parabole étant égal à son rayon de courbure, nous aurons

$$R = 2 (n - 1) a i / \lambda.$$

Ce phénomène nous est montré sur la figure VI.4.

2. *Dépôt de particules sur des supports.* — Les gouttes étudiées se trouvaient déposées sur des supports plans métallisés.

Notre étude a été plus particulièrement appliquée à l'évaluation de la quantité

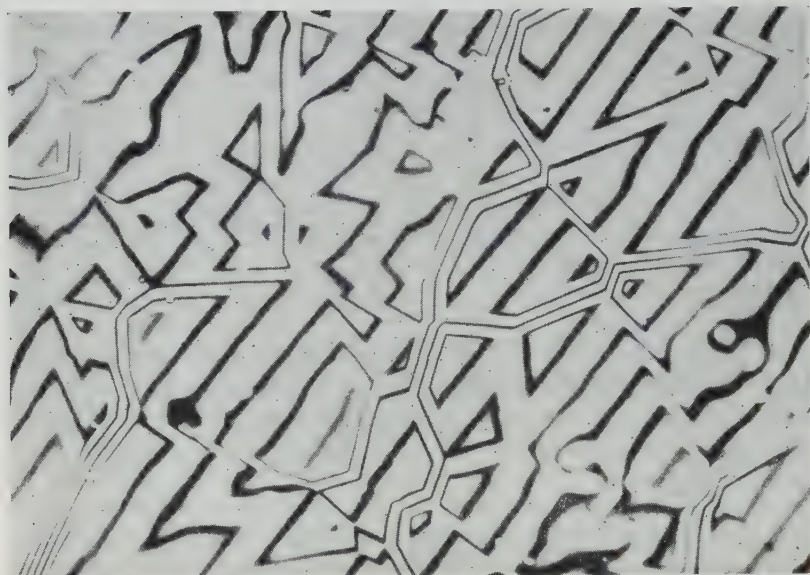


FIG. VI.4.

d'huile condensée sur des pièges placés dans une cloche à vide dans laquelle on se proposait de mettre en évidence et de mesurer un phénomène de contre-diffusion (back-streaming) caractéristique des pompes à diffusion d'huile. Les gouttes condensées au cours de l'expérience sont ensuite observées au microscope par réflexion ; on examine les franges d'égale épaisseur de ces dépôts liquides.

Il nous sera d'abord nécessaire de préciser la position de la première frange par rapport au niveau de la couche réfléchissante sur laquelle est déposé le liquide ; dans le cas des métaux cette épaisseur inférieure à $\lambda/2n$ est due à la perte de phase par réflexion.

Rappels sur le facteur de réflexion. — a) *Couche non absorbante déposée sur un support non absorbant.* — Soit n_1 l'indice de la couche et n_2 l'indice du support. Le facteur de réflexion s'exprime par [13]

$$R = |r|^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos 2\beta}{1 + r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos 2\beta},$$

$$\beta = 2\pi n_1 d/\lambda, \quad r_1 = (n_0 - n_1)/(n_0 + n_1), \quad r_2 = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2).$$

Le facteur passe par une série de maxima et de minima suivant l'épaisseur de la couche mince. Les minima ont lieu pour $\cos 2\beta = -1$, soit pour

$$n_1 d = (\lambda/4) + (k\lambda/2).$$

L'épaisseur comprise entre la première frange et le support est égale à $\lambda/4n_1$, soit la moitié des épaisseurs comprises entre deux franges.

b) *Couche non absorbante déposée sur un support absorbant.* — Ce sera le cas d'une couche mince de liquide déposée sur un support métallique. L'indice de réfraction d'un métal se met sous la forme $n_2 = n - iK$. Dans ce cas,

$$r_2 = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2) = \varphi_2 \exp(i\theta_2).$$

L'expression du facteur de réflexion devient

$$R = |r|^2 = \frac{r_1^2 + \rho_2^2 + 2 r_1 \rho_2 \cos (2 \beta - \theta_2)}{1 + r_1^2 \rho_2^2 + 2 r_1 \rho_2 \cos (2 \beta - \theta_2)}.$$

$$|\rho_2|^2 = \frac{(n_1 - n)^2 + K^2}{(n_1 + n)^2 + K^2}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2 K n_1}{n_1^2 - n^2 - K^2}.$$

Le minimum du facteur de réflexion est égal à $R = [(r_1 + \rho_2)/(1 + r_1 \rho_2)]^2$; donc cela correspond à $\cos (2 \beta - \theta_2) = 1$, d'où l'épaisseur

$$n_1 d = \frac{\lambda}{4} - \varepsilon \frac{\lambda}{4 \pi}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = - \frac{2 n_1 K}{n_1^2 - n^2 - K^2}.$$

Dans le cas d'une couche non absorbante déposée sur un support absorbant, l'épaisseur comprise entre la première frange et le support est égale à $\lambda/4 n_1$ moins une épaisseur dépendant de l'indice de la couche, de l'indice du support et de l'indice d'extinction du support.

Par exemple, pour une paraffine d'indice 1,48 déposée sur un support de chrome opaque d'indice $n_2 = 1 - 1,5 i$ nous trouvons $d = 0,29 \lambda/2 n_1$. Nous devons donc dans l'évaluation du volume tenir compte de cette hauteur supplémentaire.

3. Réfractométrie différentielle. — 1. *Etude théorique.* — Il s'avérât nécessaire, au cours de notre étude, de mesurer l'indice de liquides déposés sur des supports sans avoir recours au réfractomètre d'Abbe. En effet, ce qui nous intéresse c'est l'indice pour la forme de goutte; il peut être différent de celui du liquide; nous avons appliqué notre étude aux gouttelettes de goudron de tabac. La méthode exposée ci-après nous a permis de mesurer l'indice de microgouttes dont le volume est de l'ordre de $3 \times 10^{-9} \text{ cm}^3$. Cette méthode consiste à comparer deux interférogrammes donnant deux expressions indépendantes du chemin optique.

Le premier profil sera celui donné par les franges d'égale épaisseur de la goutte. Soit $\Delta_0(x, y)$ le profil de la goutte. Ce profil est obtenu par les interférences entre une onde réfléchie par la surface extérieure de la goutte et une onde réfractée deux fois par la goutte et réfléchie par le support à l'intérieur de la goutte (fig. VI.5). Le profil obtenu sera

$$(12) \quad \Delta_1(x, y) = 2 n \Delta_0(x, y),$$

si n est l'indice du liquide. Les franges d'interférences sont les franges d'égale épaisseur et présentent l'aspect de la figure VI.6a.

Le deuxième profil doit être obtenu dans un interféromètre du type normal. L'onde réfractée par la goutte et réfléchie est comparée à une onde plane réfléchie sur le support; soit $\Delta_2(x, y)$ ce profil:

$$\Delta_2(x, y) = 2 (n - 1) \Delta_0(x, y).$$

Dans la pratique nous avons utilisé un interféromètre à polarisation [15] qui avait un dédoublement supérieur au demi-diamètre de la goutte et permettant de l'utiliser comme interféromètre normal. La goutte est observée en lumière polarisée rectilignement par un objectif dans la pupille de sortie duquel est placé

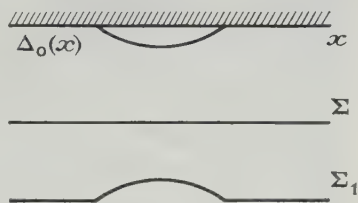
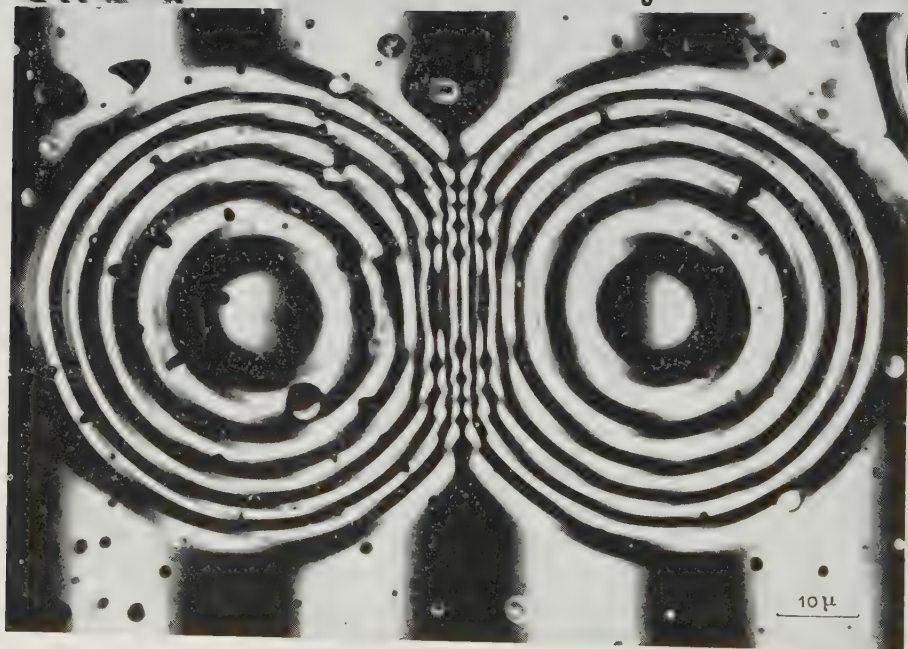
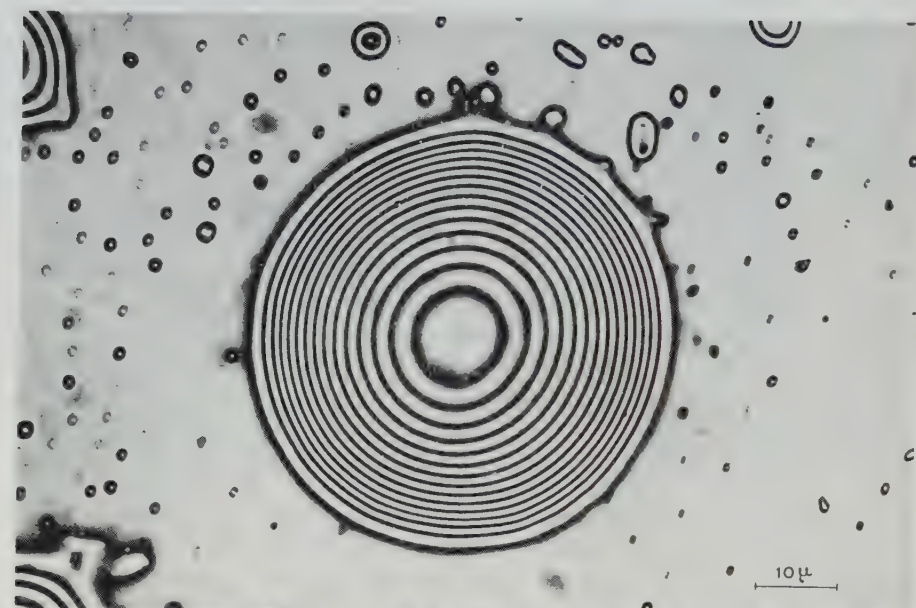


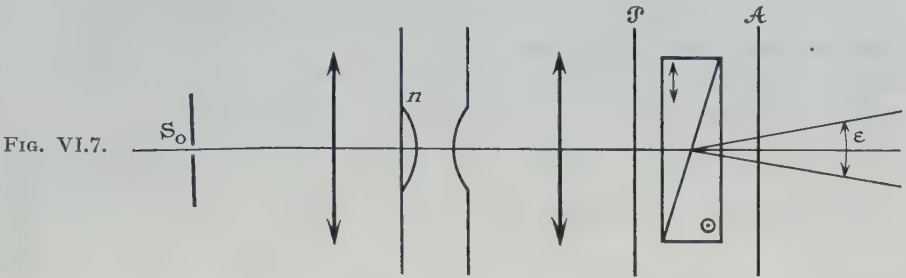
FIG. VI.5.

(a)



(b)

FIG. VI.6. — a) Franges d'égale épaisseur ; b) franges différentielles.



un prisme biréfringent en quartz. Ce prisme dédouble l'onde incidente en deux ondes polarisées à 90°. Le dispositif utilisé est représenté sur la figure VI.7. Le prisme utilisé était un babinet ; les franges d'égale épaisseur du babinet sont localisées dans le prisme et, comme nous utilisons des objectifs forts, nous verrons les franges d'égale épaisseur. Le profil $\Delta_2(x)$ présente l'aspect de la figure VI.6b.

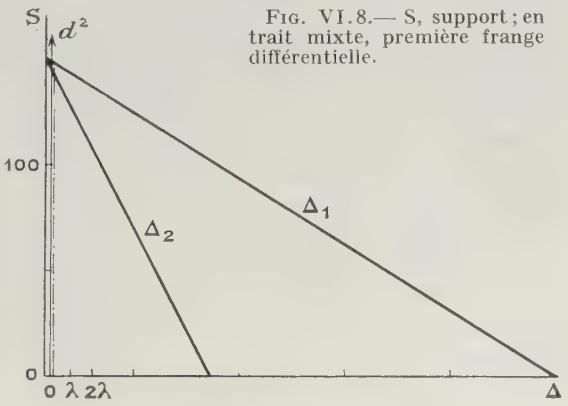
Les deux relations
$$\Delta_1 = 2 n \Delta_0(x) \quad , \quad \Delta_2(x) = 2 (n - 1) \Delta_0(x)$$
nous permettent d'obtenir la valeur de l'indice
$$n = \Delta_1(x) / [\Delta_1(x) - \Delta_2(x)] \text{ .}$$

2. Application pratique. — a) *Calcul de l'indice.* — Nous avons vu que la connaissance des deux profils Δ_1 et Δ_2 nous permettait de connaître la valeur de l'indice. Pratiquement il nous faut connaître Δ_1 et Δ_2 . Etudions d'abord le profil Δ_1 ; ce sont les franges d'égale épaisseur de la goutte. Dans un azimut donné pour avoir Δ_1 il nous suffit de tracer la courbe donnant la hauteur de la goutte en fonction du diamètre des franges d'égale épaisseur ; mais la hauteur totale n'est pas un nombre entier de franges, elle doit donc être déterminée par extrapolation. Pour cela, nous tracerons de préférence une courbe $h = f(d^2)$ [d étant le diamètre des franges d'égale épaisseur] qui est une droite étant donné le profil parabolique de la goutte.

Nous savons d'autre part, d'après (12), que la hauteur entre deux franges est $\lambda/2 n$, d'où la courbe de la figure VI.8 et la hauteur $h = N \lambda/2 n$, N ayant une valeur quelconque.

Nous procéderons de même pour le profil Δ_2 mais l'écart entre deux franges est, dans ce cas, $\lambda/2 (n - 1)$ d'où $h = N' \lambda/2 (n - 1)$. L'indice aura alors pour valeur $n = N/(N - N')$.

Nous devons, comme nous l'avons vu au paragraphe VI.2, tenir compte de l'épaisseur comprise entre la première frange et le support ; l'épaisseur ne sera pas la même dans les deux profils.



b) *Calcul des épaisseurs comprises entre la première frange et le support.* — Le changement de phase à la réflexion se traduit par le fait que l'épaisseur de liquide comprise entre la première frange et le support est différente de $\lambda/2 n$. Nous avons calculé cette épaisseur d_1 dans le cas des franges d'égale épaisseur :

$$2 n_1 d_1 = \frac{\lambda}{2} - \varepsilon_1 \frac{\lambda}{2 \pi} \quad , \quad \operatorname{tg} \varepsilon_1 = - \frac{2 n_1 K}{n_1^2 - n^2 - K^2}$$

Dans le cas des franges différentielles nous trouvons

$$2 (n_1 - 1) d = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2 \pi} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = - \frac{2 n_1 K}{n_1^2 - n^2 - K^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \varepsilon_2 = - \frac{2 K}{1 - n^2 - K^2} .$$

Dans le cas des franges d'égale épaisseur la première frange sera une frange sombre presque noire. Dans le cas des franges obtenues à l'interféromètre en supposant que l'on observe entre nicols croisés un maximum devient un minimum donc la première frange sera blanche et sur les agrandissements il faudra repérer la position des franges blanches ou adapter les formules à l'utilisation des franges sombres.

L'étude expérimentale a été faite sur un microscope par réflexion. L'interféromètre différentiel est constitué par un wollaston. L'étude expérimentale a été faite sur de la paraffine, sur de l'huile utilisée dans les pompes à vide (huile Apiezon) et sur des particules de fumée de tabac.

Pour les deux premiers corps nous avons pu constater que les résultats étaient comparables à ceux obtenus au réfractomètre d'Abbe. Nous avons pu ainsi mesurer l'indice de condensations de tabac déposées sur un support de chrome ; nous avons obtenu $n = 1,605 \pm 5 \times 10^{-3}$.

3. *Etude d'un dispositif donnant une teinte plate.* — Jusqu'ici l'étude de l'indice avait été faite avec un wollaston donnant dans le champ un système de franges rectilignes et équidistantes. Ces franges étant assez gênantes nous avons construit un prisme biréfringent spécial permettant d'obtenir un champ en teinte plate, uniforme, suffisamment large.

En effet, lorsque le champ est traversé par des franges rectilignes le profil différentiel est

$$\Delta = \Delta(x) - \Delta(x - a) + \alpha x \quad ,$$

avec $\alpha i = \lambda$, i étant l'interfrange des franges du champ ; α dépendra de l'azimut dans lequel on fera la mesure. Pour que l'effet soit négligeable nous aurons intérêt à pointer dans une direction parallèle aux franges de l'interféromètre.

Nous avons vu que les franges étaient dues au fait que le wollaston n'était pas dans le plan focal de l'objectif. Il nous faudrait donc trouver un dispositif permettant de localiser les franges dans le plan focal de l'objectif et ayant un dédoublement assez grand. Nous avons adopté le schéma des figures VI.9 et VI.10. Les axes des deux prismes sont dans le même plan et les prismes sont taillés à 45° . D'autre part entre les deux prismes nous intercalons une lame demi-onde orientée à 45° des axes des prismes. On fait un tel dispositif pour ne pas incliner la lame demi-onde.

Nous pouvons (fig. VI.11) faire la construction des rayons ; devant chaque

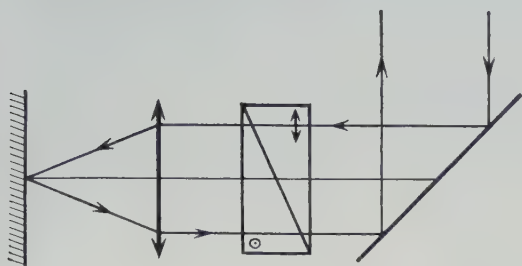


FIG. VI.9.

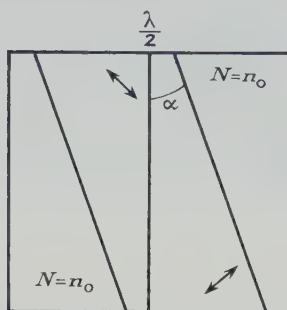


FIG. VI.10.

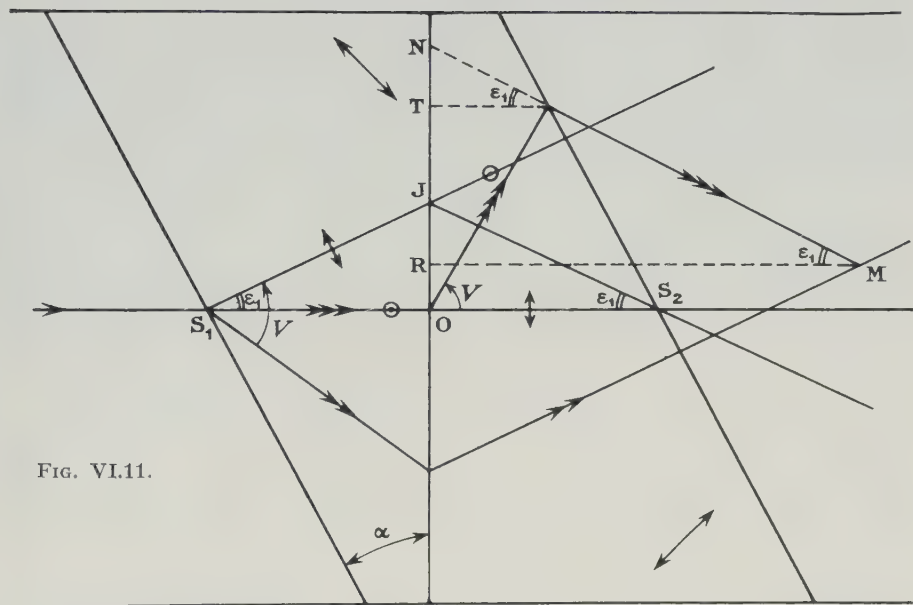


FIG. VI.11.

prisme est placé un prisme d'indice $N = n_o$, n_o étant l'indice ordinaire du quartz.

Nous savons que le rayon ordinaire coïncide avec l'onde ordinaire et qu'il vibre perpendiculairement au plan d'incidence. A la traversée de la lame demi-onde l'onde ordinaire O devient extraordinaire OE . A la sortie de la troisième face, nous aurons une déviation

$$\varepsilon_1 = \frac{n_e(45^\circ) - n_o}{n_o} \operatorname{tg} \alpha.$$

Dans le cas de l'onde extraordinaire le rayon et la normale à l'onde ne sont plus confondus. Le rayon est décalé d'un angle V dans la direction de l'axe par rapport à la normale à l'onde. La déviation pour ce rayon est

$$\delta_1 = \varepsilon_1 = \frac{n_e - n_o}{n_o} \operatorname{tg} \alpha,$$

soit dans l'air un dédoublement $\varepsilon = 2[n_e(45^\circ) - n_o] \operatorname{tg} \alpha$.

Localisation des franges. Pour que les franges soient localisées à l'extérieur il faut que l'angle V soit supérieur à ε_1 . Or pour 45° l'angle V vaut 0,005 885, d'où une première condition

$$\operatorname{tg} \alpha < V n_0 / [n_e(45^\circ) - n_0].$$

Sur la figure VI.11 nous pouvons trouver la position de la surface de localisation ; si nous posons $RM = L$ nous trouvons

$$L = (e_1 + e_2) \frac{V}{2 \varepsilon_1} + \frac{1}{2} (e_2 - e_1),$$

avec $S_1O_1 = e_1$, $S_2O = e_2$. Le plan de localisation sera donc incliné ; en effet, à une hauteur y comptée à partir du centre du prisme on aura

$$L = (e_1 + e_2) \frac{V}{2 \varepsilon_1} - y \operatorname{tg} \alpha.$$

Le plan de localisation fait un angle α avec la verticale dans le milieu d'indice $n_0 = N$.

En passant dans le milieu air, la distance de localisation comptée à partir de la dernière surface est

$$L' = \left(-E + \frac{e_1 V}{\varepsilon_1} \right) / n_0.$$

Nous avons, dans ces conditions, calculé un prisme donnant le plus fort dédoublement possible et donnant une surface de localisation située à 15 mm de la dernière surface ; de plus, nous nous étions imposé l'épaisseur totale du prisme, soit 20 mm.

Nous avons calculé un prisme dont les données de construction sont :

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,442, \quad \alpha = 23^\circ 50', \quad e_1 = 7,29 \text{ mm}, \quad \varepsilon = 0,004 \text{ 08}.$$

Avec un tel prisme nous obtenons une teinte plate dans le champ d'où plus de facilités pour mesurer l'indice.

Des mesures d'indices ont été faites avec ce dispositif et donnent des résultats concordants avec ceux donnés au paragraphe VI.3.2.

4. Résultats. — A) Donnons des résultats de mesures effectuées sur une paraffine. Les gouttes ont été déposées sur un support chromé et examinées au microscope métallographique. La description du dispositif sera faite dans le paragraphe ayant trait à la volumétrie. Dans le cas des gouttes les franges d'égale épaisseur sont circulaires et le profil sera étudié dans un plan d'azimut bien déterminé. Les profils Δ_1 et Δ_2 seront tracés pour le même plan de section. Nous aurons intérêt à prendre des gouttes présentant un assez grand nombre de franges d'égale épaisseur ; en effet, le nombre des franges différentielles sera inférieur au nombre des franges d'égale épaisseur (d'après les expressions de Δ_1 et Δ_2) ; pour extrapoler la courbe jusqu'au sommet de la goutte nous devons avoir assez de points.

Franges d'égale épaisseur (tableau XV). On en déduit le graphique $\Delta_1 = 24,14 \lambda$ en tenant compte de la hauteur $h_1 = 0,29 \lambda/2 n$ comprise entre la première frange et le support.

Franges de l'interféromètre (tableau XVI). $\Delta_2 = 7,83 \lambda$ en tenant compte de la hauteur $h_2 = 0,4 \lambda/2 n$ comprise entre la première frange et le support, d'où la valeur de l'indice $n = 1,480$. La valeur mesurée au réfractomètre d'Abbe est $n = 1,481$.

TABEAU XV

<i>h</i>	0	$\frac{\lambda}{2\,n}$	$2\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$3\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$4\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$5\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$6\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$7\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$8\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$9\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$10\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$11\,\frac{\lambda}{2\,n}$
<i>d</i>		11,99	11,7	11,41	11,12	10,83	10,53	10,22	9,91	9,59	9,26	8,92
<i>d</i> ²	152,02	143,8	136,9	130,2	123,7	117,3	110,9	104,4	98,2	91,96	85,7	79,6
<i>h</i>	$12\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$13\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$14\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$15\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$16\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$17\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$18\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$19\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$20\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$21\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$22\,\frac{\lambda}{2\,n}$	$23\,\frac{\lambda}{2\,n}$
<i>d</i>	8,57	8,20	7,81	7,41	6,87	6,52	6,03	5,49	4,88	4,24	3,44	2,35
<i>d</i> ²	73,4	67,2	61	54,9	47,2	42,5	36,4	30,1	23,81	18	11,8	5,52

TABEAU XVI

Δ_2	0	λ	$2\,\lambda$	$3\,\lambda$	$4\,\lambda$	$5\,\lambda$	$6\,\lambda$	$7\,\lambda$
<i>d</i>	11,98	11,16	10,24	9,27	8,15	6,87	5,19	2,91
<i>d</i> ²	143,5	124,5	105	86	66,4	47,2	27,0	8,50

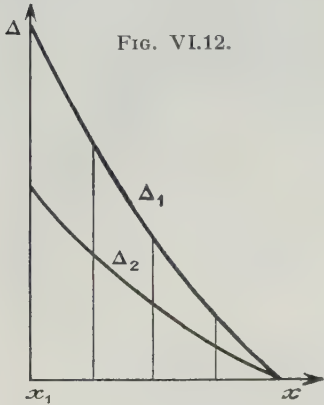


FIG. VI.12.

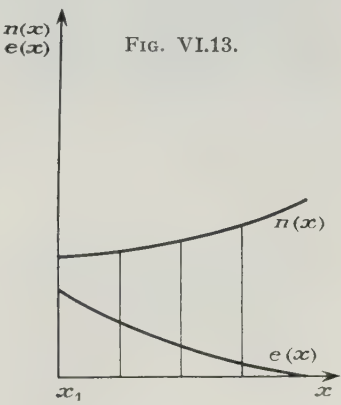


FIG. VI.13.

D'après l'expression de *n* nous pouvons en déduire la précision

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta \Delta_1}{\Delta_1} + \frac{2\,\delta \Delta_1}{\Delta_1 - \Delta_2},$$

d'où, avec les ordres de grandeur envisagés, nous trouvons une précision de l'ordre de 5×10^{-3} . Les pointés des franges ont été faits au microscope et seule la largeur des franges limite la précision.

B) Nous allons montrer que l'on peut connaître l'indice en chaque point dans le cas de corps non homogènes. En effet,

$$\Delta_1 = 2\,n\,\Delta_0(x) = 2\,n\,d(x) \quad , \quad \Delta_2 = 2\,(n - 1)\,d(x) \quad .$$

On en déduit la répartition des épaisseurs $d(x) = \frac{1}{2} [\Delta_1(x) - \Delta_2(x)]$. De même la répartition des indices est donnée par $n(x) = \Delta_1(x) / [\Delta_1(x) - \Delta_2(x)]$.

Supposons que les profils soient tels que sur la figure VI.12 ; les répartitions sont représentées sur la figure VI.13.

4. **Volumétrie.** — L'observation d'une goutte microscopique d'un liquide au microscope montre les franges d'égale épaisseur de la goutte. Déterminons le volume de cette goutte. Nous avons donné au paragraphe VI.1 l'expression du volume d'une goutte dans le cas général. Dans le cadre de notre étude la volumétrie sera faite au moyen des franges d'égale épaisseur dessinant la topographie des gouttes.

1. **Méthode de mesure utilisée.** — Les franges d'égale épaisseur sont des courbes de niveau de la goutte ; elles permettent de reconstituer le profil de la goutte ; en effet l'épaisseur entre chaque frange est égale à $\lambda/2 n$. Soit z la cote d'un point de la goutte, comptée à partir du support ; le volume peut s'exprimer par

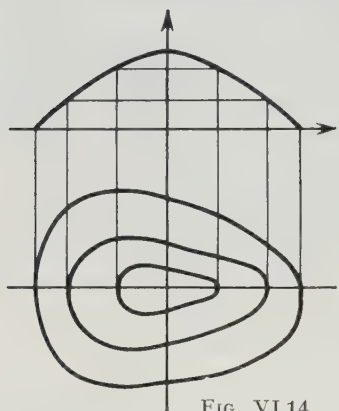


FIG. VI.14.

$$V = \int_0^h S(z) dz,$$

où $S(z)$ est l'aire de la section parallèle à la base à la hauteur z . Il suffira de mesurer la surface enfermée par chaque frange et d'en déduire le volume V .

Le profil a été tracé sur la figure VI.14. D'abord il faut déterminer la hauteur entre la première frange et le support. Les volumes sont faciles à calculer partout étant donné que les franges sont équidistantes ($\lambda/2 n$) sauf pour la base et le sommet.

Traçons la courbe $S = f(z)$ obtenue par mesure des surfaces encadrées par les franges d'égale épaisseur. Au voisinage du sommet la goutte peut être assimilée à un paraboloïde ; donc au voisinage du sommet la courbe $S = f(z)$ est une droite ; pour obtenir le sommet de la goutte il suffira d'extrapoler cette droite. Une fois tracée la courbe $S = f(z)$, le volume sera donné par intégration graphique.

Cette étude expérimentale a été faite sur de nombreuses gouttes et sur des liquides particuliers : paraffine, huile de pompe à diffusion et particules de fumées de tabac.

La méthode expérimentale consiste à déposer les gouttes sur des supports réfléchissants et à les examiner au microscope par réflexion. L'état de surface des supports influe sur la répartition ainsi que sur la forme des gouttes. Les moyens d'obtention des gouttes ne sont pas les mêmes suivant les liquides utilisés ; nous les décrirons dans un prochain paragraphe.

Nous avons tracé de nombreux profils $S = f(z)$ et nous avons pu en tirer quelques conclusions. Lorsque le support est parfaitement propre les gouttes sont de révolution ; les franges d'égale épaisseur sont des circonférences. Dans ce cas le profil $S = f(z)$ se ramène au profil $d^2 = f(z)$ si d est le diamètre des franges d'égale épaisseur. Nous nous sommes attachée à chercher l'équation d'une courbe s'adaptant le mieux possible au profil trouvé expérimentalement, soit à trouver dans le

TABLEAU XVII

$\frac{d^2}{4} (\mu^2)$	55,35	46,38	36,97	27,46	17,89	8,82
$y_{calculé}$	0	$0,97 \frac{\lambda}{2n}$	$1,99 \frac{\lambda}{2n}$	$3,02 \frac{\lambda}{2n}$	$4,06 \frac{\lambda}{2n}$	$5,04 \frac{\lambda}{2n}$
$y_{mesuré}$	0	$\frac{\lambda}{2n}$	$2 \frac{\lambda}{2n}$	$3 \frac{\lambda}{2n}$	$4 \frac{\lambda}{2n}$	$5 \frac{\lambda}{2n}$

cas d'une goutte de révolution l'équation de la méridienne.

a) *Goutte de révolution ; équation de la méridienne.* — Supposons d'abord que la première frange se trouve sur le support ; soit h sa hauteur et soit R le rayon de la première frange d'égale épaisseur. Comme première approximation nous supposons une courbe du quatrième degré ; nous trouvons comme expression

$$y = h + \left(\frac{1}{R} - \frac{2h}{R} + \frac{\text{tg } \Phi}{2} \right) x^2 + \frac{1}{R^3} \left(\frac{h}{R} - \frac{\text{tg } \Phi}{2} \right) x^4 = h + k x^2 + k' x^4,$$

si Φ est l'angle de raccordement de la goutte et du support.

Soit pour l'expression du volume,

(13) $V = -k \pi \frac{R^4}{2} - 2 k' \pi \frac{R^6}{3}.$

Pour avoir la valeur de $\text{tg } \Phi$ il faudra mesurer le diamètre des premières franges. Nous avons comparé les volumes obtenus par cette formule et par la méthode planimétrique et nous avons trouvé des résultats concordants.

Dans le cas de l'huile de paraffine et de l'huile de pompe à diffusion la courbe $d^2 = f(z)$ est une droite ; la goutte est donc parabolique, l'équation de sa méridienne est

$$y = h \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right), \quad \text{d'où} \quad V = \frac{1}{2} \pi R^2 h.$$

Nous pouvons ici aussi comparer le profil obtenu par planimétrie et le profil théorique (fig. VI.15 et tableau XVII). On constate que $|\delta_M| \leq 1,5 \%$, donc que les résultats sont acceptables.

b) *Etablissement des formules dans le cas des particules de tabac.* — Nous avons constaté expérimentalement que le profil $S = f(z)$ dans ce cas se compose d'une droite et d'un arc de courbe. On constate que la courbe est rectiligne à partir de la troisième frange d'égale épaisseur. Traçons le profil d'une particule de tabac (fig. VI.16 et tableau XVIII) ce qui donne un volume égal à $V = 2\,400 \mu^3$; en

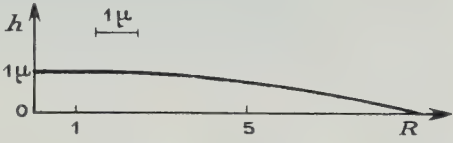
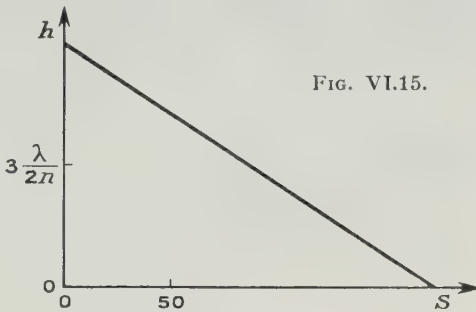


FIG. VI.15.



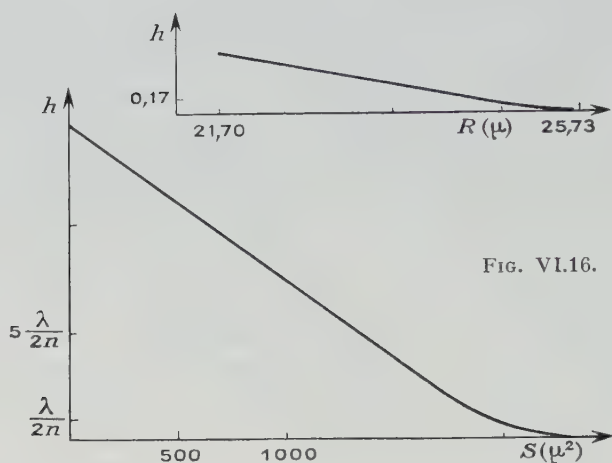


FIG. VI.16.

TABLEAU XVIII

$R (\mu)$	25,73	24,77	23,50	22,65	21,70	20,60	19,47	18,28	17,07	15,89	14,25	12,65	10,77	8,62	5,46
$S (\mu^2)$	2 341	1 926	1 736	1 612	1 480	1 332	1 192	1 050	916	793	638	503	365	233	93,6

appliquant la formule on obtient $V = 2\,397 \mu^3$. De ces hypothèses nous pouvons déduire une expression du volume

$$V = S_3 \frac{h}{2} + \frac{\lambda}{2n} S_1 - \frac{\lambda}{12n} \frac{(S_1 - S_3)^2 (S_1 + S_3 - 2S_2)}{(S_1 - S_2)(S_2 - S_3)}.$$

L'expression fait intervenir les surfaces des première, deuxième et troisième franges.

Une étude comparative des résultats obtenus par planimétrie et par l'utilisation de cette formule a été faite et nous a permis de voir que nous obtenions une précision de l'ordre de 1 % sur des volumes de l'ordre de $300 \mu^3$.

2. *Résultats.* — La méthode de volumétrie utilisée nécessite des supports parfaitement propres ne présentant ni rayures ni traces de graisse. Un dépôt de chrome ou d'aluminium aura été fait sous vide sur les supports.

L'étude sur la condensation d'huile de pompe à diffusion a été scindée en deux parties ; une première partie a porté sur l'étude de particules déposées par vaporisation. La deuxième partie consiste à connaître la quantité d'huile condensée dans une cloche à vide par le phénomène de contre-diffusion. Les supports-pièges sont déposés dans la cloche et la quantité d'huile est déterminée par la méthode précédente. Les supports sont observés au microscope ; l'aspect est celui de la figure VI.17 et la mesure sera une mesure statistique (grossissement du microscope, environ 500). L'huile employée est une huile d'indice $n = 1,483\,5$ et de poids spécifique $\rho = 0,875$. La pompe à diffusion d'huile était munie d'un baffle non refroidi.



FIG. VI.17.

L'équation à utiliser pour une goutte est $V = \frac{1}{2} (h + h_1)^2 S_1/h$, où h est la hauteur, h_1 l'épaisseur entre le support et la première frange et S_1 la surface encerclée par la première frange.

La méthode nous a permis de mesurer un poids de $23,8 \times 10^{-6}$ g/cm² déposé en 4 h 30 m de fonctionnement ; cela permet de connaître la valeur de la contre-diffusion.

Dans le cas de particules de tabac, le mode de piégeage sera identique ; les particules sont condensées au moyen d'une machine à fumer par exemple. Les formules applicables sont plus compliquées du fait du profil même de la goutte :

$$V = \frac{1}{2} S_3 h + \frac{\lambda}{2 n} S_1 - \frac{\lambda}{12 n} \frac{(S_1 - S_3)^2 (S_1 + S_3 - 2 S_2)}{(S_1 - S_2) (S_2 - S_3)} + h_1 S_1 + \frac{n}{\lambda} h_1 (S_1 - S_2).$$

Si l'on étudie des particules ayant peu de franges d'égale épaisseur, on pourra prendre une forme simplifiée des formules.

La méthode ainsi décrite nous a permis la mesure de volumes de l'ordre de 3×10^{-9} cm³ avec une précision de l'ordre de $0,1 \times 10^{-9}$ cm³.

5. Remarques sur l'emploi de sources monochromatiques. — On emploie rarement des sources monochromatiques (surtout sources blanches ou mal filtrées).

Etudions donc la visibilité des franges en fonction de l'ordre d'interférence de l'objet et de la répartition spectrale des sources utilisées.

Soit $\tau(\nu)$ la répartition spectrale ; l'intensité pour la fréquence ν_0 s'exprime par

$$I(\nu_0) = 1 + \cos \varphi = 1 + \cos \frac{2 \pi}{\lambda_0} z = 1 + \cos \frac{2 \pi}{\lambda_0} 2 d = 1 + \cos 2 \pi N$$

en prenant $z = N \lambda_0$, d'où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(v - v_0) (1 + \cos 2\pi v N \lambda_0) dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(v - v_0) dv + \operatorname{Re}[\bar{\tau}(N \lambda_0)] \cos 2\pi N,$$

si $\bar{\tau}(N \lambda_0)$ est la transformée de Fourier de la fonction τ . En normalisant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(v - v_0) dv = 1, \quad I = 1 + \operatorname{Re}[\bar{\tau}(N \lambda_0)] \cos 2\pi N,$$

d'où la visibilité des franges en lumière blanche : $V = \operatorname{Re}[\bar{\tau}(N \lambda_0)]$.

Traisons le cas particulier où la répartition spectrale des sources est une fonction rectangle (fig. VI.18). On obtient

$$I(v) = 1 + \frac{\sin 2\pi (\Delta v/2) N \lambda_0}{2\pi (\Delta v/2) N \lambda_0} \cos 2\pi N,$$

d'où la visibilité

$$V = \frac{\sin 2\pi (\Delta v/2) N \lambda_0}{2\pi (\Delta v/2) N \lambda_0}.$$

Etant donné l'ordre d'interférence peu élevé, la lumière rigoureusement monochromatique ne se justifie pas.

CONCLUSIONS

L'intervention du microscope a deux effets principaux sur les franges d'interférences.

a) *Cohérence de l'éclairage*. Nous avons vu que pour de fortes ouvertures numériques la fonction de visibilité est modifiée par la relation des sinus (par rapport à une source sphérique).

b) *Diaphragmation mutuelle des pupilles du condenseur et de l'objectif*. Nous avons pu donner pour divers éclairages les angles limites. Il n'y a pas de diaphragmation, pour une source circulaire, tant que $2\alpha_c < u_0 - u_c$, si u_0 est l'ouverture numérique de l'objectif et u_c l'ouverture numérique du condenseur.

D'autre part la diaphragmation mutuelle n'intervient que pour des valeurs de l'angle du coin satisfaisant à la relation $u_0 - u_c < \alpha < u_0 + u_c$. Au delà de $\alpha = u_0 + u_c$ il n'y a plus de résolution du phénomène d'interférences.

En conclusions pratiques on peut connaître les tolérances sur l'étendue de la source à partir de la fonction de visibilité.

Dans le cas d'un prisme épais, on l'a décomposé en une lame épaisse et un coin mince ; les fonctions de visibilité dépendent de l'épaisseur du coin si la mise au point est faite sur le plan de localisation, de l'épaisseur et de l'angle pour un plan avec défaut de mise au point (si l'angle du coin est faible).

Dans toute l'étude expérimentale nous avons travaillé avec un diaphragme d'ouverture fermé afin d'éviter les pertes de contraste.

Manuscrit reçu le 15 mai 1963.

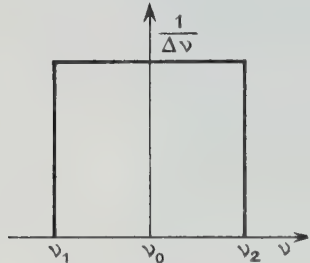


FIG. VI.18.

RÉFÉRENCES

- [1] A. ARNULF & M. FRANÇON, Cours de mesures optiques, Inst. Opt., Paris.
- [2] M. BORN & E. WOLF, Principles of optics, éd. Pergamon Press, Oxford, 1959.
- [3] A. MARÉCHAL, Imagerie géométrique. Aberrations, éd. *Rev. Opt.*, Paris, 1952.
- [4] A. MARÉCHAL & M. FRANÇON, Diffraction. Structure des images, éd. *Rev. Opt.*, Paris, 1960.
- [5] C. BRUCE, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **45**, 1955, p. 1084.
- [6] C. BRUCE, *Austr. Jl Physics*, t. **8**, 1955, p. 224.
- [7] B. THORNTON, *Austr. Jl Physics*, t. **8**, 1955, p. 241.
- [8] C. BRUCE & B. THORNTON, *Jl sci. Instrum.*, t. **34**, 1957, p. 203.
- [9] G. W. STROKE, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **47**, 1957, p. 1097.
- [10] M. FRANÇON, Handbuch der Physik, éd. Springer, Berlin, 1956, t. **24**, p. 200.
- [11] R. LANDWEHR, *Opt. Acta*, t. **6**, 1959, p. 52.
- [12] BASHFORTH & ADAMS, On attempt to test the theory of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid, Cambridge Univ.
- [13] F. ABELÈS, Cours Ecole Sup. Opt., Paris.
- [14] G. NOMARSKI, *Jl Phys.* [8], t. **16**, 1955, p. 9 S.
- [15] G. NOMARSKI, *Jl Phys.* [8], t. **17**, 1956, p. 1 S.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Microscopie par rayons X .

Vu et approuvé :

Paris, le 19 mai 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE

M ^{me} HUREL-PY	Biologie Végétale (P.C.B.).	DE POSSEL	T Analyse numérique.
PIAUX	T Chimie (M. P. C.).	CHARLOT	T Chimie analytique.
BRUN	T Mécanique théorique des Fluides.	HAISSINSKY	T Radiochimie.
LEDERER	T Chimie biologique.	LEMÉE	T Physiol. Vég. B. M. P. V. (Orsay).
M ^{me} DUBREIL	T Mathém. (Agrégation).	GUÉRIN	T Chimie M. P. C. (Orsay).
M ^{me} LELONG	T Mathématiques (E.N.S.).	CHATELET M.	T Chimie (P. C. B.).
BELLAIR	T Géologie (S. P. C. N.).	JEAN	T Phys. Nucléaire (Orsay).
COTTE	T Physique électricité.	MATTLER	T Physique S.P.C.N. (Ors.).
DUBOIS J. E.	T Chimie organique.	MICHEL L.	T Phys. Théor. des Hautes Energies (Orsay).
LAMOTTE	T Zoologie (E. N. S.).	BERGERARD	Zoologie (Orsay).
MICHEL A.	T Chimie Minérale (Orsay).	BERTEIN	Electronique (Orsay).
OLMER	T Energétique générale.	BOUSSIÈRES	T Chimie des Radioéléments (Orsay).
ROUAULT	T Electricité (Orsay).	M ^{me} COUTURE	T Thermodynamique et Mécanique Physique.
GAUTHIER	T Mécanique appliquée.	ELLENBERGER	Géologie appl. s/le terr.
BARCHIEWITZ	T Chimie Physique.	FRANC	T Biol. Animale (P. C. B.).
BROSSEL	T Physique atomique.	SCHNELL	T Botanique tropicale (Orsay).
BUSER	Physiologie comparée.	STOLKOWSKI	Physiologie générale.
CAMUS	Physiol. Vég. (B.M.P.V.).	ACHER	T Chimie Biol. (Orsay).
CASTAING	T Physique (Orsay).	BAUDOIN	T Biologie animale P.C.B.
CURIEN	T Minéralogie et Cristallographie.	BEAUMONT	T Biol. animale. S.P.C.N.
MOYSE	T Physiologie végétale (Orsay).	BLAMONT	T Géophysique Ionosphère.
NOIROT	Evolution des Etres Org.	BOURREAU	T Botanique.
PANNETIER	T Chimie générale (Orsay).	CURIE D.	T Physique (M. G. P.).
POSSOMES	T Zoologie.	DURAND-DELGA	T Géologie.
PULLMANN	T Chimie théorique.	FRÉON	T Chimie organique (Orsay).
TEILLAC	T Physique Nucléaire et Radioactivité.	HELLER	Physiologie végétale.
TONNELAT	T Biologie physico-chim.	TORTRAT	T Calcul des Probabilités.
VILLE	T Econométrie.	CAILLEUX	T Géologie (S. P. C. N.).
WILLEMART	T Chimie (P. C. B.).	MAGNAN	T Physique (S. P. C. N.).
DODE	T Chimie (Orsay).	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
FREYMANN	T Recherches Physiques.	M ^{lle} FOURCROY	T Biol. Végétale (S.P.C.N.).
GUINOCHE	T Biologie Vég. S.P.C.N. (Orsay).	M ^{me} CHOQUET-BRUHAT	T Mécan. Analytique et Mécanique céleste.
ROLLET	T Chimie (P.C.B.).	M ^{lle} VEIL	T Physiologie Générale.
M ^{lle} JOSIEN	T Chimie (S.P.C.N.).	LWOFF	T Microbiologie.
CHEVALLEY	T Géométrie algébrique et théorie des groupes.	SIESTRUNCK	T Mécanique physique et expérimentale.
ARNOULT	T Electronique (Orsay).	LACOMBE	T Métall. des métaux Nucl.
CHAPELLE	T Physique (Orsay).	BROCHARD	T Physique P.C.B. (Orsay).
DELANGE	T Mathématiques (Orsay).	CABANNES	T Mécanique générale.
DENY	T Mathématiques Générales (Orsay).	LESIEUR	T Mathématiques M. P. C. (Orsay).
GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides.	MAZET	T Mécanique générale (Orsay).
LUCAS G.	T Géologie.	CAIRE	T Géographie physique et Géolog. dynamique.
ALLARD	T Chimie Physique.	COMOLET	T Mécanique des fluides.
BERTHELOT	T Physique Fondamentale des Hautes Energies (Orsay).	CORABOEUF	T Physiologie Animale.
BRICART	T Météorologie et phys. de l'Atmosphère.	DELLOUE	T Physique de l'exosphère.
M ^{me} ALBE-FESSARD ..	Psychophysiologie.	GORENFLOT	T Botanique II (Orsay).
FRIEDEL	Physique des Solides (Orsay).	HOUILLOIN	T Biol. animale (P.C.B.).
M. JULIA	Etudes des Moléculaires naturelles complexes.	JULLIEN J.	T Chimie (P.C.B.).
LENDER	T Biol. Animale S.P.C.N. (Orsay).	MALGRANGE	T Technique Math. de la Physique
MAGAT	Physico-chimie des radioéléments.	OLIVIER	T Anthropologie.
M ^{lle} QUINTIN	T Electrochimie.	NOZERAN	T Botanique II (Orsay).
MONOD	T Chimie du métabolisme.	BLANC-LAPIERRE ...	T Physique E.N.S. (Orsay).
RENOIT	T Physiol. Anim. (Orsay).		

Secrétaire général.....R. POULLAIN.

